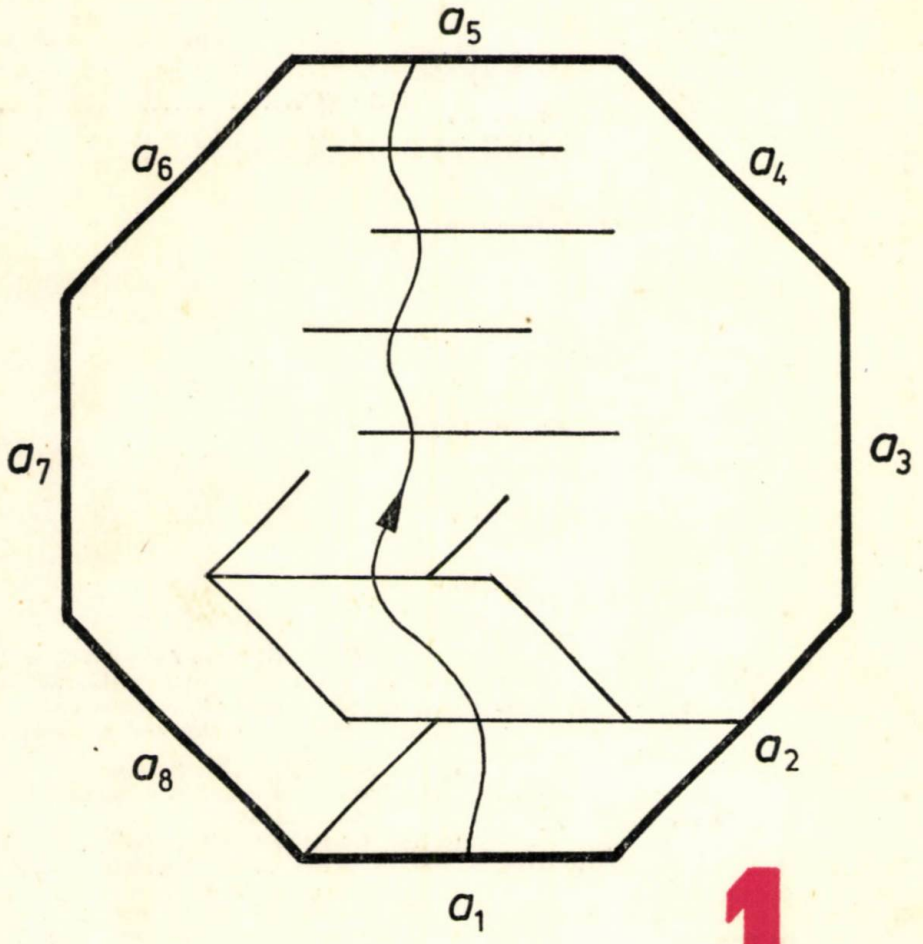
A Matematika Tanítása

A Művelődési Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat módszertani folyóirata



1985. február * XXXII. évfolyam 1 szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

A MŰVELŐDÉSI MINISZTÉRIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:

HÓDI ENDRE

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG:

ÁCS PÁL, BEREZNAI GYULA, BIGE ISTVÁNNÉ, ELŐD ISTVÁNNÉ, KOVÁCS ZOLTÁN, NÉMETHY KATALIN, NYILAS DEZSŐ, PÁLMAY LÓRÁNT, DR. PELLER JÓZSEF, POGÁTS FERENC, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ, SZTANÓ TAMÁSNÉ

Szerkesztőség: 1071 Budapest, Gorkij fasor 17—21.
Telefon: 211-200

84-3959 — Szegedi Nyomda — F. v.: Dobó József igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS

A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

Előfizethető a hírlapkézbesítő postahivatalokban és a Posta Központi Hírlap Irodában (postacím: Budapest V., József nádor tér 1. — 1900) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI 215-96 162 pénzforgalmi jelzőszámlára. Előfizetési díj egész évre 42,— Ft. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példányonkénti eladási ár: 7,— Ft.

ISSN 0461—3902

Kérjük a kartársakat, hogy közlésre szánt cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a szerkesztőség fenti címére. A papirlapnak csak egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betűhely. Szíveskedjenek közölni a következő adatokat is:
a) személyi számukat, *b)* asszonyok leánykori nevüket, *c)* lakáscímüket — irányítószámmal, *d)* foglalkozásukat (beosztásukat), *e)* munkahelyük pontos megnevezését, *f)* munkahelyük címét — irányítószámmal.

TARTALOM

Előd Istvánné: Mi jelent meg eddig az általános és középiskolai új matematika-tantervek és a hozzájuk csatlakozó dokumentumok közül? 1
Balázs László: Az általános iskolai matematikatagozatos osztályok tanítási tapasztalatai 3
Dr. Kálmán Attila: Tehetségkutatás, tehetséggondozás a gyakorlatban 9
Dr. Horváth Miklós: Papposz egyik híres feladatának történetéből 15
Gáspár Gyula: A számítógépek elméleti alkalmazásai 21
FELADATOK 29

СОДЕРЖАНИЕ

Элёд Иштванне: Что издано до сих пор из учебных программ, учебников и сопровождающих пособий для начальной и средней школы 1
Балаж Ласло: Опыт преподавания в классах математического отделения общеобразовательных 8-летних школ 3
д-р Кальман Аттила: Поиск талантливых детей и уход за ними — на практике.. 9
д-р Хорват Миклош: Из истории одной из знаменитых задач Паппоса..... 15
Гашпар Дьюла: Теоретическое применение ЭВМ 21
ЗАДАЧИ 29

INHALT

Frau Ilona Előd (geb.: *Bakos*): Was sind aus den neuen Mathematik-Lehrplänen der Grund- und Mittelschulen und aus den zugehörigen Dokumenten bisher erschienen? 1
Balázs, László: Lehrerfahrungen in den Klassen mit erweitertem Mathematikunterricht der Grundschule 3
Dr. Kálmán, Attila: Die Auffindung und Förderung der mathematisch begabten Schüler in der Praxis 9
Dr. Horváth, Miklós: Aus der Geschichte einer berühmten Aufgabe von Pappos.. 15
Gáspár, Gyula: Die theoretischen Anwendungen der Computers 21
AUFGABEN 29

ELŐD ISTVÁNNÉ
felelős szerkesztő
Tankönyvkiadó, Budapest

Mi jelent meg eddig az általános és középiskolai új matematika-tantervek és a hozzájuk csatlakozó dokumentumok közül?

A Matematika Tanítása 1981., 1982., 1983. és 1984. februári számában levő cikkek az 1983. szeptemberig megjelent tantervek és dokumentumok jegyzékét tartalmazzák. Az alábbiakban csak az azóta megjelent új kiadványok jegyzékét közöljük.

1. ÁLTALÁNOS ISKOLA

1.1. **Alsó tagozat**

1.1.2. *Új tanterv*

Matematika-feladatgyűjtemény 3. osztály. Szerkesztette: Dr. Andrásfai Béláné. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1984. R. sz.: 318. (1984-től.)

1.2. **Felső tagozat**

1.2.2. *Új tanterv*

Kovács Csongorné—Novák Lászlóné—Sztrókayné Földvári Vera—Szeredi Éva: Kézikönyv a matematika 7. osztályos anyagának tanításához. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1984. R. sz.: 83 022. (1984-től.)

Dr. Varga Tamás—Radnainé Szendrei Julianna: Az általános iskolai nevelés és oktatás terve. Tantervi útmutató. Matematika 8. osztály. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1984. R. sz.: 83 040. (1984-től.)

Újvári István: Felkészülés és felzárkózás matematikából. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1984. R. sz.: 19 029. (1984-től.)

2. KÖZÉPISKOLA (ÉS KÖZÉPFOKÚ ISKOLA)

2.1. **Szakmunkásképző iskola**

Matematika-feladatgyűjtemény (a gépjárműtechnikai szerelő szakmák). 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1984. R. sz.: 12 513. (1984-től.)

Matematika-feladatgyűjtemény (a műszeripari szakmák). 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1984. R. sz.: 12 514. (1984-től.)

Matematika-feladatgyűjtemény (a villamosgép- és energiaipari szakmák). 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1984. R. sz.: 12 516. (1984-től.)

Matematika-feladatgyűjtemény (a vegyipari szakmák és fodrásztanulók). 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1984. R. sz.: 12 517. (1984-től.)

Matematika-feladatgyűjtemény (a fa-, papír- és nyomdaipari szakmák). 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1984. R. sz.: 12 518. (1984-től.)

Matematika-feladatgyűjtemény (az építőipari, csőhálózati- és berendezésipari szakmák). 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1984. R. sz.: 12 519. (1984-től.)

Matematika-feladatgyűjtemény (a szövő, fonalgyártó, ruhaipari és bőripari szakmák). 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1984. R. sz.: 12 520. (1984-től.)

Matematika-feladatgyűjtemény (a vendéglátóipari szakmák). 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1984. R. sz.: 12 521. (1984-től.)

Matematika-feladatgyűjtemény (a kereskedelmi szakmák). 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1984. R. sz.: 12 522. (1984-től.)

Matematika-feladatgyűjtemény (a növénytermesztő és állattenyésztő szakmák). 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1984. R. sz.: 12 523. (1984-től.)

Matematika-feladatgyűjtemény (az egészségügyi szakiskolák). 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1984. R. sz.: 12 524. (1984-től.)

2.2. **Szakközépiskola**

Czapáry Endre: Tanári kézikönyv. Matematika I—II. osztály. 1. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1984. R. sz.: 84 105. (1984-től.)

Dr. Haraszty György—Kátay Sándor—Vancsura Zsolt: Számítógépek rendszertechnikája II., III. osztály. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1984. R. sz.: 58 118. (1984-től.)

2.3. **Gimnázium**

Dr. Korányi Erzsébet: Tanári kézikönyv. Matematika III—IV. osztály. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1984. R. sz.: 84 098. (1984-től.)

Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1984. R. sz.: 81 307. (1984-től.)

3. DOLGOZÓK ISKOLÁJA

3.1. **Szakközépiskola**

3.1.2. *Dolgozók szakközépiskolája*

Újvári István: Matematika III. (Esti és levelező tagozat). 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1984. R. sz.: D 14 302. (1984-től.)

3.2. **Gimnázium**

Dr. Koller Lászlóné: Matematika III. (Esti és levelező tagozat.) 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1984. R. sz.: D 13 302. (1984-től.)

Dr. Hámori Miklós:

Tanulás és tanítás számítógéppel

Ez a kiadvány nem technikai, nem a programnyelv oldaláról, hanem a pedagógia és a pszichológia aspektusából dolgozza fel a témát. A könyvben mellékletként szerepel néhány BASIC nyelvű program is.

Tankönyvkiadó, Budapest, 1983., 1984. (R. szám: 52 983)

BALÁZS LÁSZLÓ
vezető szakfelügyelő
Eger

Az általános iskolai matematikatagozatos osztályok tanítási tapasztalatai

A Matematika Tanítása 1982. évi 1. számában részletesen írtam az általános iskolákban szervezhető matematikatagozatos osztályokról.

Az MM Közoktatási Főosztálya 1981. szeptember 1-től Heves megye négy iskolájában engedélyezte kísérleti jelleggel a matematikatagozatos osztályok indítását az 5. osztályokban.

A fent említett cikk foglalkozik a tagozatos osztályok céljával, feladatával, utal a tantervre és a követelményrendszerre, a tagozatos osztályok szervezésének lehetőségeire. Röviden összegzi a módszertani alapelveket.

Ennek a cikknek a feladata az elmúlt három év tapasztalatainak rövid összegzése, amelynél nagy figyelmet fordítottunk a tagozatos kiegészítő tantervet tanító kartársak véleményére, a felmérésekre, az óralátogatásokra, az iskolavezetés és néhány szülő véleményére, javaslatára. Minden év végén a tapasztalatok iskolai összegzéséhez egységes szempontokat adtunk ki, és ezek szerint végeztük mi is a tagozatos osztályokban folyó munkák elemzését.

Mivel a tagozatos tanterv az „alaptanterv" kiegészítője, igen fontos annak vizsgálata, hogy a tagozatos kiegészítő tanterv megfelelően illeszkedik-e az „alaptanterv"-hez? Valamennyi kartárs — akik tanítják a tagozatos tantervet — egyöntetű véleménye az, hogy az „illeszkedés" megfelelő, jó. Ezt az is bizonyítja, hogy az 1—4. osztályos tananyag megfelelő előképzettséget biztosít a tagozatos tanterv jó befogadására. Ezt elősegítette a 3. osztálytól szervezett matematikaszakkör, egyes helyeken a KMBK szervezése, melyek előkészítő jelleggel működnek, és fő feladatuk az alsós tananyag elmélyítése, az önállóság fokozottabb biztosítása, a munkatempó növelése. Fontosnak tartjuk a tanárok együttműködését a 3—4. osztályokban tanító kartársakkal, melyeknek eredményeképpen lényegesen javult a tanulók geometriai jártassága, szövegértelmező képessége. A jó odafigyelés biztosította azt, hogy a 3—4. osztályos tanulók jól elsajátították a természetes számok körében végezhető műveleteket, megfelelő alapokat szereztek az egész számok és a törtek, a nyitott mondatok, a függvények, a sorozatok tanulásához. Az is egyértelműen fogalmazódott meg, hogy már a 3. és 4. osztályokban érdemes — az életkori sajátosságoknak megfelelő — matematikatörténeti érdekességek, szép és gondolkodtató feladatok megoldását, bemutatását szorgalmazni, mert ez a matematikaszaktárgy megszerettetését, szerepének növelését is biztosítaná.

A módszertani ajánlások a tagozatos osztályok szervezését az ún. „bázisiskolákban", körzeti iskolákban javasolja. Ezzel valamennyi érdekelt fél egyetért. Ezeket az osztályokat körzethatáron kívüli beiskolázásúvá javasolja tenni. Ezt nem sikerült még ez ideig megvalósítani. Oka a nem kellő odafigyelés, általában az egyes iskolák indokolatlan presztízsféltése.

A tagozatos tantervet az „alaptantervre" építettük. Mivel új anyagrészeket is tartalmaz, valamint az „alaptantervet" szeretnénk szélesebb tapasztalati bázisra helyezni — beleértve a kiegészítő anyagot is —, a követelményrendszer is bővült. Olyan anyagrészeket is tartalmaz, amelyeknek ismerete lényegesen elősegíti a középiskolai matematikai anyag jó elsajátítását, befogadását. Ez az oka annak, hogy a tagozatos osztályokban az évi óraszámot 55 órával emeltük. Az eddigi tapasztalatok azt mutatják, hogy ennyi óra szükséges, de elégséges is a többletanyag elmélyült elsajátításához, kellő begyakorlásához.

A kiegészítő tagozatos tanterv átdolgozásánál — amit 1983-ban végeztünk el — osztályonként 10—10 órában számítástechnikai ismereteket is terveztünk. Itt az alapfogalmak megismerését, az egyszerű programok készítését tűztük ki célul. Minden tagozatos tantervet tanító kartárs egyöntetű véleménye az, hogy a számítástechnikai ismereteket ki kell szélesíteni, illetve az egész tananyagra kell vonatkoztatni, ahol erre lehetőség van.

A zsebszámológépek használata már egyértelműen bebizonyította, hogy jó hatással van a számolási készség fejlesztésére, a logikus gondolkodás intenzívebb fejlesztésére, mert a zsebszámológépek alkalmazása időmegtakarítást is biztosít, ami jó visszahatást jelent a matematikai ismeretek bővítésére, gyakorlására.

A tagozatos tanterv egyik alapvető feladata a tehetséggondozás. Az eddigi tapasztalat azt mutatja, hogy az évenkénti 55 többletóra nemcsak a jobb, de a gyengébb képességű tanulóknak is lehetőséget nyújt a matematika elmélyültebb megismerésére, míg a tehetségesebb tanulókat a képességeikkel arányosan terhelhetjük, nagyobb teljesítmények elérésére serkenthetjük. A tehetségek időbeni felfedezése és gondozása igen fontos feladat. Ezek segíthetők a szakkörön, a KMBK-én, a fakultáción, de a legnagyobb lehetőséget a tagozatos osztályok biztosítják, egyrészt azért, mert beépül az iskola hivatalos „menetrendjébe", másrészt tantervével és követelményeivel a legszervezettebb és legátfogóbb programot adja négy éven keresztül.

A három éves tapasztalat azt bizonyítja, hogy mind a szülők, mind a tanulók részéről megvan a kellő érdeklődés a tagozatos osztályok iránt. Minden iskolában szülői értekezleten ismertették a matematikatagozat célját, feladatát. A megjelenés majdnem 100%-os volt. Az érdeklődést az is mutatja, hogy a nyílt napokon a leglátogatottabb órák a matematikatagozatos órák voltak. A tagozatos osztályban tanulók nemcsak matematikából, hanem más tárgyakból is valamivel többet kapnak az átlagosnál. Tudásuk is ennek megfelelő. Az osztályok évvégi tanulmányi átlaga 3,9—4,2 között van.

A nevelési feladatok megvalósítása is fokozottabb mértékű a tagozatos osztályokban. A tanterv anyaga, az órán alkalmazott módszerek jól segítették a tanulók világnézeti, erkölcsi, politikai nevelését. Jobb a tanulók magatartása, szorgalma, lényeges fejlődés mutatkozik a közösségi szellem jó kialakításában. A világ eseményei iránti érdeklődésük, a munkához való hozzáállásuk, az iskolai életben való aktivitásuk egyaránt átlagot meghaladó színvonalú.

Mivel egy cikk terjedelme nem engedi meg részletes táblázat közlését, valamint annak elemzését, ezért az eredmények konkrét igazolására csak néhány számadattal és rövid szöveges elemzéssel utalnék. (Az adatok a négy kísérleti iskolára értendők!)

5. osztály

Év végi matematika átlag: 3,89.
Megírt témazárók száma: 6.
Teljesítmény százalékban: 70.
Átlagos dolgozati átlagok: 3,67.

A felmérőlapok feladatainak elemzése

1. Számfogalom alakulása

Következetesen felmérték az egész számok, törtszámok, tizedes, illetve vesszős törtek ismeretét.

— Egész számok növekvő vagy csökkenő sorrendbe rendezése: 85—100%-os eredményű.
— Törtek (pozitív és negatív törtek) ábrázolása számegyenesen: 90—97%.
— Tizedes törtek ismerete — különféle alakja a törteknek — nagysági viszonyok: 81—82%.
— Mértékegységek átírása tizedes tört alakba (tömeg, idő, terület): 74—76%.
— Számok átírása más számrendszerekbe, vesszős törtek: 58—65%.
— Racionális számok ábrázolása (nehezen választható számegyenes pontjaival): 68%.

2. Műveletek különböző számhalmazban

— Egész számok összeadása, kivonása: 75—85%.
— Törtekkel műveletek: 82—85%.
— Törtek szorzása, osztása egész számmal és törtek egyszerűsítése, bővítése: 75—83%.
— Törtek összeadására, kivonására vonatkozó nyitott mondatok (egyenletek és egyenlőtlenségek): 58—62%.
— Tizedes törtek osztása egész számmal; és műveletek tizedes törtekkel: 73—85%.
— Különböző számrendszerekben adott számokkal a négy alapművelet végzése: 55%.
— Bűvös négyzet tizedes törtszámokkal való műveletekre: 89%.

3. Szöveges feladatok, egyenletek; sorozatok

— A feladatok megfogalmazása legtöbbször összetett, vagy a gondolkodást veszi igénybe, pl.:
„Számítsd ki a kivonandót, ha a különbség 0,37 és a kisebbítendő 2,56! Mennyi legyen a kivonandó, ha azt szeretnénk, hogy a különbség 5 legyen?" 63%-ban oldották meg a tanulók Heves körzeti iskolában.
— Egyszerű szöveges egyenletek: 55—77%.
— Sorozat képzése: 83%.
— Számtani sorozat tetszőleges elemének meghatározása: 83%.
— Összetett szöveges feladatok: 67%.
— Százalékkal csökkentett érték meghatározása: 81%.

4. Grafikonok, függvények; logikai feladatok

— Pontok helye a koordináta-rendszerben — megadásuk jelzőszámaikkal — háromszögterület-problémákkal kiegészítve: 66—74%.
— Mozgásgrafikonok készítése, értelmezése: 82%.
— Lineáris függvény képletének felismerése és ábrázolásuk koordináta-rendszerben: 70%.
— Logikai kijelentések vizsgálata: 87—96% (témaköre: aritmetikai, oszthatósági vagy geometriai kérdésekre vonatkozott).
— Halmazokba rendezéssel oszthatósági kérdések vizsgálata: 95%.

5. *Geometria*

— Összetett feladat közös tulajdonságú ponthalmazokra (mértani helyek): 52—83%.
— Síkidomok tulajdonságai, összefüggések ismerete: 71%.
— Négyszögek rajzolása — szögmérés, kerület- és területszámítás; téglalap és háromszög területének összefüggése: 63—71—93%.
— Egyszerű testek felszíne és térfogata: 60%.
— Téglatest és kocka éleinek meghatározása összefüggések alapján, majd felszín és térfogat meghatározása: 79—85%.

6. *Valószínűségi problémák:*

— Relatív gyakoriság meghatározása: 88%.
— Bonyolultabb összefüggéssel megfogalmazott relatív gyakoriság és valószínűség meghatározása: 54%.

A felmérők feladatai a tantervi követelményeket jól befedik, eredményei azt mutatják, hogy a *tanulók a normál tanterv anyagát magas %-ban teljesítik és még a tagozatos — kiegészítő anyagokban is 50—60, sőt közel 70%-os eredményeket tudnak elérni.*

A nevelők a kísérlet során tudatosan vizsgálják az eredményeket, a tapasztalt hiányokra figyelnek; képzési feladatokkal pótolják azt. Az osztály tanulóinak differenciálására egyéni képességek, teljesítmények formálására ügyelnek.

A felmérő dolgozatok feladatai eléggé összetettek, az összefüggések vizsgálatára, a feladat megértésére késztetnek. Ezek nagy részét normál osztályokban így kitűzni nem volna célszerű. Megfigyelték a kartársak, hogy a „rutinjellegű" feladatban inkább hajlamosak a hibára, mint a gondolkodtatóbb, összetettebb feladatokban. Ezért írta egyik nevelő: „Feladatom volt, hogy a tanulókat az egyszerűbbnek tűnő feladatok megoldásában is nagyobb figyelemre szoktassam."

Külön eredmény a geometriai feladatok jó százalékos aránya, ez az 1. osztálytól kezdődő oktatásnak is pozitív hatása.

6. osztály

Év végi matematika átlag: 4,2.
Megírt témazárók száma: 5.
Teljesítmény százalékban: 75,5.
Átlagos dolgozati átlagok: 3,9.

1. *A számfogalom alakulása*

Itt is előfordul még néhány feladatban, de már „magasabb" — szempontú vizsgálata a számok ismeretének:

— Számok törzstényezős alakja, és azok ln.k.o-jának, lk.k.t-ének meghatározása: 90—92%.
— Számok halmazokba rendezése oszthatósági szabályok és kongruencia alapján: 68—85%.
— Számok közelítő értékének (alsó és felső határok) ábrázolása számegyenesen: 72%.

A feladatok többségében a számadatokat összefüggésekkel vagy különböző alakban (tört, tizedes tört, százalék alak, arány, hányados, egyenlet gyöke, törtnek törtrésze stb.) adják meg a kartársak műveletekhez, vagy algebrai kifejezések értékének meghatározásához, vagy geometriai feladatokhoz. Az ilyen „összetett" feladatok teljesítménye is 70—84%-os.

2. *Műveletek, algebrai kifejezések számértéke*

— Racionális számok körében műveletek: 83%.
— Műveleti azonosságok alkalmazása, műveleti eljárások egyszerűsítése: 90—83—87%, illetve 50%.
— Műveleti azonosságok törtszámokkal és tizedes törtekkel: 74%.
— Felírt nyitott mondatok (azonosságokkal) megoldása: 66%-os.
— Műveletek eredményeinek előrebecslése: 84%.
— Törtekkel való műveletek elvégzése, törtrész kiszámítása: 79—86%.
— Összetett százalékszámítási feladat, összekapcsolva a mozgásproblémával: 63%.
— Szövegből nyitott mondat, egyenlet felírása és megoldása: 76—82%.

3. *Függvények táblázata, grafikonja*

— Táblázat készítése, majd ábrázolása a függvényeknek; a függvénygrafikonok jellemzése: 79—91%-os, sőt 95%-os eredmények.
— Arányossági feladatok megoldása szöveges feladatok alapján: 70—87%.
— Arányosság alkalmazása geometriai (szögszámításos feladatokban): 90%.
— Számsorozatokról szóló szöveges feladatok megoldása egyenlettel: 69%.

4. *Kombinatorikai feladatok, logikai feladatok*

— Az összes lehetőség előállítása: 87%.
— Adatok megválasztása; kombinatorikai problémák felmérése: 70—90%.
— Logikai feladatok (oszthatóságra): 82%.

5. *Geometriai feladatok*

— Merőleges egyenesek, szögszerkesztések háromszög szerkesztéséhez kapcsolva: 67—76%.
— Mértani helyek alkalmazása szerkesztésben: 64%.
— Sokszögek meghatározása (speciális adatokból, pl.: 8°-os külső szög: 3000°—3500° közötti belső szögösszeg) alapján: 41—56%.
— Sokszögek területkiszámítása a téglalap területére való visszavezetéssel: 84%.
— Háromszögek, húrtrapézok szerkesztése — a körülírható kör sugarával, átlóval és az alapadatokkal — majd a kerületük, területük kiszámítása: 67—69—79—90%.
— Deltoid szerkesztése, kerülete, területe: 79—84%.

A feladatok általában összetettek, komplexek, a tantervi követelményeket felölelik. Csak a „váratlanabb" problémáknál találhatunk néhány esetben 40—50—56%-os megoldásokat; pl.: egyszerűsítést vagy különösebb „fantáziát" igénylő feladatoknál csökkent a teljesítmény a 65—75—85%-os „megszokott" arányok alá. A normál tantervi ismeretek elég jónak bizonyultak.

7. osztály

Év végi matematika átlag: 4,3.
Megírt témazárók száma: 5.
Teljesítmény százalékban: 72,2.
Átlagos dolgozati átlagok: 3,73.

Ezzel az évfolyammal indult a kísérlet. *Az 1984/85. tanévben a szakosított tantervi kísérlettel fejezik be a 8. osztályt.* A matematika osztályzatok átlaga 4 feletti.

1. *A számfogalom*

— Számok hatványa és négyzetgyöke táblázattal: 71—78%.

— Számok felírása normálalakba: 86%.
— Végtelen tizedes törtek (racionális számok) felírása tört alakba: 75%.
— Számok felírása prímtényezős alakba; ln.k.o. és lk.k.t. meghatározása: 80%.

2. *Műveletek végzése, műveleti azonosságok, műveletek algebrai kifejezésekkel*

Ez az ismeretanyag is tudatosan bővül, az előzőkre építve.
— Algebrai kifejezésekkel műveletek, azonosságok: 57—68—76%, de 91—100%.
— Algebrai kifejezések számértéke: 75%.
— Hatványazonosságok alkalmazása feladatokban: 88%.

3. *Egyenletek — szöveges egyenletek — függvények, sorozatok*

— Egyenlet megoldása algebrai és grafikus úton: 70—71—95%.
— Szöveges egyenlet felírása és megoldása: 65—73—75%.
— Törtes egyenlet, vagy exponenciális egyenlet is: 93—88%, az utóbbi 52%.
— Függvények, amelyek lineárisak; két függvény ábrázolása közös koordinátarendszerben: 70—95%.
— Sorozatok felírása, szabályának meghatározása; valahányadik elemének felírása: 68—82%.
— Sorozatok (számtani és mértani sorozatok) összegének kiszámítása: 37—52%, de 68—75%, ha a szövegezése és adott adatai konkrétak, a feladatnak a teljesítménye jobb. Összefüggésekkel adott adatok esetén csökken 50% alá.
— Mértani sorozat elemeinek összege (a sor határértéke): 49%.

4. *Geometria*

— Szakasz és szög meghatározása algebrai összefüggés alapján: 92%.
— Sokszögek előállítása tükrözéssel (pontra) a kapott alakzat kerülete, területe: 71%.
— Euklideszi szerkesztések — magasságvonal, súlyvonal adatokkal: 65%; körülírható kör sugár adattal: 86%; látószög meghatározás: 55% de 83—84—90%-os eredmények is vannak.
— Mértani hely a szerkesztésekben: 61—91%.
— Thalész-tétel a szerkesztésben: 64%.
— Pitagorasz-tétel alkalmazása: 77—90%.
— Nagyítás aránya kerület és terület esetén; alakzat meghatározása: 70—90%.
— Nagyítás végrehajtása belső pontból: 55%.
— Szöveges geometriai feladatok, amelyek elemzést, diszkussziót igényelnek: 47—88%.
— Bizonyítási feladatok: 52—68%.
— Sokszög szerkesztése, kerülete, területe, átlói és szögei: 84%.

5. *Valószínűségi feladatokat* 79—84%-os teljesítménnyel oldották meg a tanulók.

A felmérés adatai összetettek; a követelményrendszert 65—75—92%-ban teljesítették a tanulók. A tantervi kiegészítő anyagokra utaló feladatok (exponenciális egyenlet, mértani sorozat határértéke stb.) teljesítése 37—49—52%-os. Diszkutálásra, bizonyításra jelölt feladatokban is 47—52%-os az eredmény. A differenciálás miatt a feladatlapok egy részén találhatók a törzsanyagon túlra mutató feladatok is. A tanulók tudása szabja meg a feladatlapok összeállításának igényességét, ahogy a teljesítésük egyre magasabb, a nevelők is úgy próbálkoznak igényesebb (a normál osztályok feladatain túlmutató) feladatjelöléssel.

Az eredmények azt mutatják, hogy jelentős fejlődés tapasztalható a feladatmegoldó készségben, az önálló munkavégzésben, az önellenőrző tevékenységben, a szóbeli kifejező készségben, a több időt igénybe vevő intenzívebb munkában.

Az elért eredményeket jól példázza Forgács Miklós erdőtelki tanár, aki a következőket írja: „Fejlődés minden területen mutatkozik. Kevés olyan feladat van, amellyel szembe kerülve tehetetlenséget éreznének. Ismerik és alkalmazzák egy-egy probléma megközelítésének többféle útját. Eredményeik indoklása igénnyé fejlődött, hasonlóan a matematikai bizonyítások. Jó szintű az egyenletek, nyitott mondatok megoldása, a függvények ábrázolása, tájékozódásuk a koordináta-rendszerben, függvényvizsgálatok terén stb."

Összegezve immár a három év tapasztalatait, egyértelműen megállapíthatjuk, hogy a matematikatagozatos osztályoknak van létjogosultságuk. Az elért eredmények, az irántuk való érdeklődés, a továbbtanulásra való felkészítés, az elért jó nevelési eredmények mind a tagozatos osztályok szervezése mellett szólnak. Több központi és egyéb segítséggel ezek az eredmények tartóssá válnak és továbbfejleszthetők lesznek. Ha pedig ez így lesz, remélhetjük, hogy a matematikatagozat is ugyanolyan „polgárjogot" nyer, mint az ének-zene, testnevelés és a többi tagozat.

(Az osztályok felmérő lapjainak elemzésénél felhasználtam Balogh Viktória főiskolai docens által végzett év végi értékelést.)

DR. KÁLMÁN ATTILA
tanár
Tata, Eötvös József Gimnázium

Tehetségkutatás, tehetséggondozás a gyakorlatban

Mi kell a tehetség kibontakoztatásához?

— Adottságok,
— helyes értékrend, társadalmi igény,
— megfelelő iskolarendszer,
— tehetséges és kellően fölkészült pedagógusok,
— az iskolán belül megfelelő keretek, külső lehetőségek, támogatások,
— helyes pedagógiai szemlélet, alkalmas tanítási módszerek.

A különböző adottságok különböző életkorban jelentkeznek. A matematikával kapcsolatosak az elsők között, már az alsó tagozatban feltűnnek. Ezért minden ott tanítónak egyben matematika-tehetségkutató szakembernek is kellene lennie.

Ha a közösség (a társadalom, az iskolai osztály) kellően értékeli a nagyobb tudást, teljesítményt, akkor ez nagymértékben elősegíti a tehetségek kiemelkedését. A kontraszelekció, a kivételezés pedig gátolja azt.

Egy iskolarendszer nem akkor demokratikus, ha a különböző képességűeket együvé kényszeríti, hanem akkor, ha mindenki a saját képességeinek megfelelő úton, a saját képességeinek megfelelő tempóban és fokig juthat el.

Ehhez szükség van menet közben többször is szelekcióra, de ugyanakkor biztosítani kell a később érőknek a fölzárkózás lehetőségét.

Ha egy osztályban valamely tantárgyból csak egy (vagy néhány) kiemelkedő képességű van, aligha törekszik a képességei szerinti maximum elérésére. Gyorsabban fejlődik az adott területen, ha kiemeljük, s hasonló érdeklődésűek és

képességűek között intenzívebb oktatásban részesítjük őt.

Osztom azonban Kárteszi Ferenc egyetemi tanár aggodalmát is: ha egy osztályból kiemeljük a legjobbakat, a motort vesszük ki belőle.

A tehetségesek és az átlagos képességűek érdeke egyszerre nem elégíthető ki maradéktalanul. Tarthatatlan azonban az a gyakorlat, hogy az általános iskolák zömében a tehetségesek szempontjaival egyáltalán nem törődnek, hiszen semmiféle szelektálás nincs, egy osztályba kényszerülnek néha gyógypedagógiai alanyokkal is. Ezért az órák zömében nem tehetséggondozás vagy tanítás, hanem korrepetálás folyik.

Gimnáziumban a tagozatos osztályokba hasonló érdeklődésű tanulók kerültek. Tudták értékelni egymás teljesítményét, az első év elejétől versenyszellem alakult ki, teljes intenzitással dolgoztak a négy éven keresztül (többségük nem csupán a választott tantárgyból).

Csupán annak a néhány tanulónak volt rossz ez a rendszer, aki elhamarkodottan választott, nem bírta a lépést a többiekkel, s mégsem ment át valamelyik párhuzamos osztályba, mert ott eltért a második idegen nyelv vagy mert megszerette az eddigi közösségét.

A fakultatív rendszer ezekre épít. A kevesekre, a bizonytalanokra. Ugyanakkor a többség, aki már — ha nem is határozott pályaválasztással, de — kialakult érdeklődési körrel érkezik a középiskolába, két évig heterogén osztályba járva elveszíti azt a lelkesedést, lendületet, amellyel átlépte a gimnázium küszöbét.

Igenis kellenek elit iskolák és elit osztályok, de kizárólag a szellemi elit számára. Ne számítson se a származás, se az összeköttetés, se a magánórákkal feltupírozott tudás!

Hogyan lehet ezt elérni?

Abszolút-korrekt, többlépcsős felvételi vizsgákkal és azzal, hogy minden tanév végén ki kell tenni az elit osztályból azokat, akik nem fejlődnek megfelelően és a megüresedett helyeket meghirdetni ugyanabban a körben, ahonnan az elsősöket toborozták. Így kettős célt érnénk el: sokkal szorgalmasabban dolgoznának a bent levők, hogy bent maradhassanak, a kiszorultak pedig azért, hogy később bekerülhessenek, s végül a valóban legrátermettebbek emelkednének ki.

Eredményes tehetségtámogató munka aligha képzelhető el jó képességű és jól felkészült pedagógusok nélkül. Tapasztalatom szerint a tanítók matematikai, a tanárok tantárgypedagógiai felkészültsége hiányosabb általában.

A tehetséges tanár mágnesként vonzza magához a tehetséges diákokat. Ha nincs „kondenzációs mag", nincs „kicsapódás".

Tatai próbálkozások

1. *Kapcsolat az általános iskolákkal*

A tatai Eötvös József Gimnáziumban 5—5 párhuzamos osztályban 760 diák tanul. Körzetünkhöz 11 általános iskola tartozik. Elsősorban nem a 4 tatai, hanem a 7 községi iskola némelyikének van szüksége arra, hogy besegítsünk tehetségkutató és -gondozó munkájába. Van, ahol nem teljes a szakos ellátottság, van ahol nincs szakkör.

A tatai gimnáziumban szervezett általános iskolai matematika-szakkörre 30—50 gyerek jár évek óta rendszeresen. Nagy részük már ekkor megoldja és beküldi a Középiskolai Matematikai Lapok egyszerűbb gyakorlatait.

A gimnáziumban matematikai délutánt, számítógép-bemutatót, gondolkodtató feladatokból matematika versenyt rendezünk a hetedikes és a nyolcadikos diákoknak. A rendezvények lebonyolításában (szervezés, felügyelet, javítás) részt vesznek azok a negyedikes gimnazisták, akik matematikatanárnak készülnek.

A gimnázium tanárai matematikai délutánokat tartanak általános iskolák-

ban, úttörőházakban is. Látogattunk általános iskolai bemutató órákat, szakköri foglalkozásokat, s visszahívjuk az ott tanítókat hozzánk hasonló alkalmakra.

Az elsősök felmérő dolgozatait volt tanáraik kezébe adva beszéljük meg az átmenet megkönnyítésének lehetőségeit. Az általános iskolások és tanáraik használhatják a kb. 2000 kötetes szakkönyvtárunkat, meghívjuk őket a gimnáziumban rendezett matematikaversenyekre, előadásokra, kiállításokra.

2. *Versenyek*

A cél az, hogy minél több tanuló kapcsolódjon bele, s egy-egy tanuló minél több alkalommal és minél többféle versenyen induljon.

A benevezők számát néhány egyszerű fogással sikerült növelnünk:
pl.:

— minden induló sajátkezű aláírásával jelentkezik a versenyre;
— a dolgozatokra nem a nevét írja, hanem csak a húzott sorszámot;
— a verseny napján kijavítjuk az összes dolgozatot, s másnap a faliújságra minden versenyző valamennyi részpontszámát kiírjuk (tehát mindnyájan pontos visszaigazolást kapnak a munkájukról, ugyanakkor kilétüket csak azok fedik fel, akik elégedettek az eredményükkel; nem kell senkinek sem szégyenkeznie).

Háziversenyeinket „felmenő rendszer"-ben szervezzük. Az elsősök versenyén indulhatnak a környező általános iskolások legjobbjai, az élen végzők (általában az első 5 helyezett) indulhat a másodikosok versenyén, az ottani élmezőny a harmadikosokén stb.

Ezzel a legjobbak nem csupán újabb versenylehetőséghez jutnak, hanem olyan feladatokkal is találkoznak, amelyekhez hasonlóval a tanórákon még nem foglalkoztak, s különösen nagy dicsőség a felsőbb évesek között is helytállni. (1984-ben a másodikos Zsoldos Zsolt a negyedikesek élmezőnyébe küzdötte föl magát.)

Ez a módszer arra is ösztönzi a tanulókat, hogy önállóan előre is tanuljanak, s ez a tehetségesek számára — kellő irányítás és ellenőrzés esetén — különösen hasznos lehet.

Háziversenyeink első fordulójába az iskola tanulóinak kb. 40%-a (300 fő) szokott benevezni. Színesíti a versenyt, hogy részt vesznek azon a közeli csehszlovákiai Komárom magyar középiskolásai is. Így a mi legjobbjaink — visszahíváskor — szokatlan körülmények között, a mieinktől lényegesen eltérő feladatokkal is találkozhatnak több ottani középiskola versenyén. Tehát nem csupán jutalom, hanem hasznos erőpróba is a „kiküldetés".

A tehetségkutatásra különösen alkalmasak az olyan tanulmányi versenyek, amelyeken nem a tanulók intelligenciáját, hanem „csupán" ötletességét, alkotóképességét mérjük. Ilyen pl. a tatai gimnázium egykori tanárának emlékére rendezett Öveges József Emlékverseny (legutóbb 24 gimnázium 112 tanulója vett részt), amelyen a benevező első és másodikos gimnazisták 3—3 olyan matematika- és fizikafeladatot kapnak, amelyek megoldásához alig kell előismeret, viszont igen sok koncentráló- és elemzőképességet, térszemléletet, fantáziát, leleményességet igényelnek.

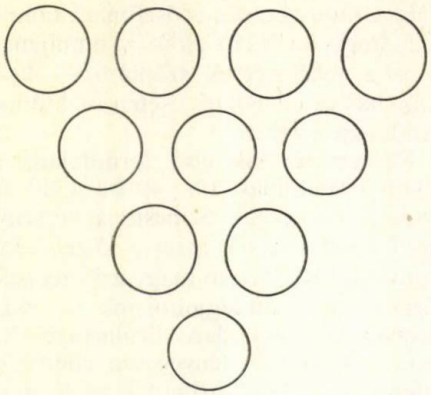
Például *a)* Egy kocka alakú szoba (éle 4 méter) olyan belső pontjaiban, amelyek minden laptól egész méterre vannak, elhelyezünk egy-egy legyet. Kivéve a kocka középpontját, ahol egy minden irányban egyenesen látó pók van. Hány legyet lát a pók?

b) 10 db 10 filléresből az ábrán látható alakzatot (szabályos háromszög) készítettük el. (L. a következő oldalon!)

Pontosan 3 db tízfilléres elmozgatásával állíts elő ezzel egybevágó másik alakzatot!

c) Egy négyzet alapú egyenes gúla 5 lapjának síkja hány részre osztja föl a teret?

d) Egy tetraéder (háromszög alapú gúla) minden élének hossza egész szám, az



1. ábra

élhosszainak összege 17. Adj meg minél több ilyen tetraédert! Egy-egy ábrán tüntesd föl az élek hosszát!

3. *A Középiskolai Matematikai Lapok pontversenyei*

A leendő elsősök szüleinek értekezletén ismertetjük a KÖMAL jelentőségét, ezért sokan már a beiratkozáskor előfizetnek a folyóiratra, amelyet szeptemberben kézhez is kapnak. Ekkor — a megengedettnél több segítséget kapva — mindazok megpróbálkoznak a gyakorlatok megoldásával és beküldésével, akik az átlagosnál jobban kedvelik és tudják a matematikát. Számuk ugyan — az idő múlásával és a segítségadás megszűntével — lényegesen csökken, de tapasztalatunk szerint hasznos, hogy ilyen magas létszámmal kezdünk, mert így lényegesen többen maradnak rendszeres beküldők, mint kisebb merítés esetén.

A pontverseny kiválóan alkalmas arra is, hogy a diákok megtanuljanak egy-egy megoldást szabatosan megfogalmazni, indokolni; a saját teljesítményüket objektíven mérni, összehasonlítani társaikkal.

4. *A tanórán kívüli foglalkozások*

Természetesen mi is próbálunk élni minden megadott lehetőséggel (KÖMAL szakkör, hagyományos szakkör, számítástechnika-szakkör, sáv, egyetemi előkészítő, „versenyistálló", Bolyai szakkör Győrben, FEB levelezés, látogatás számítóközpontban...) a tehetségkutatás és gondozás érdekében.

Kétségtelenül hasznosak lehetnek ezek az alkalmak, de olyan sok egyéb elfoglaltsága van a tanároknak és a diákoknak is, hogy nem marad idő az egyéni elmélyült munkára, a keserves-gyönyörű bírkózásra egy-egy nehezebb feladattal.

Feltétlenül szükség van az ábrázoló-geometria-sávra, (vagy „B" fakultáció esetén a szabad órák egy részében az ábrázoló geometria elemeinek megtanítására), mert a tárgy igen jó eszköz a térszemlélet, a térbeli elképzelő erő fejlesztésére, s mert hosszú érési időt igényel. Egyetemen, főiskolán sokan kényszerülnek évismétlésre azért, mert képtelenek ábrázoló geometriából az ottani gyors tempót követni.

5. *Egyéb lehetőségek*

a) Könyvtár

Amikor még tagozatos osztályaink voltak, fokozatosan megvétettem a tanulókkal az elérhető szakköri kiadványokat, példatárakat és egyéb matematikai segédkönyveket. A jobbaknak érettségiig 25—30 kötetes kis szakkönyvtára gyűlt össze. Ma ez megvalósíthatatlan, mert kevés az utánnyomás, az új könyvek ára pedig nem a diákzsebekhez méretezett.

Megnőtt tehát az iskolai könyvtárak szerepe. Annál is inkább, mert kisebb településeken a közkönyvtárakban nagyon kevés matematikakönyv található. A matematika-szertárunkban levő szakkönyvtárban kb. 2000 kötet van a példatárakkal és a tantárgypedagógiai munkákkal együtt. Ezt a gyűjteményt — önkiszolgáló rendszerben — bármelyik diákunk szabadon használhatja.

b) Faliújság

A folyosón levő kb. 3 m²-es faliújságunkon rendszeresen megjelennek hirdetések, versenyfeladatok, versenyeredmények, egy táblázatban folyamatosan feltüntetjük, hogy ki hány KÖMAL-feladatot, illetve gyakorlatot küldött be;

kirakjuk a legszebb elemi geometriai és ábrázoló geometriai rajzokat, függvényábrázolásokat, a legötletesebb tanulói feladatmegoldásokat és egyéb matematikai tárgyú írásokat.

c) Kiállítás

A tanév végén a legötletesebb tanulói rajzokból, modellekből, valamint a könyvtár legújabb szerzeményeiből kiállítást rendezünk. Meggyőződésem, hogy valamilyen területen a legtöbb tanuló tud átlagon felülit teljesíteni. Sokszor a matematika egyes területein gyenge eredményt elérők is kitűnnek szép rajzaikkal, modelljeikkel, s utána szívesebben tanulják a tantárgyat.

d) Alkotó matematikusokkal való találkozás

Tapasztalatunk szerint igen nagy hatással van éppen a legfogékonyabb, legtehetségesebb tanulókra, ha módjukban áll személyesen találkozni alkotó emberekkel. Ezért rendszeresen hívunk iskolánkba művészeket, tudósokat. A meghívott matematikusok közül különösen nagy hatással volt diákjainkra Daróczy Zoltán, Kárteszi Ferenc és Lovász László.

Szemlélet—módszer

A tehetségkutatásra és tehetséggondozásra általános módszer, recept aligha adható. Szabvány eszközökkel nehéz rendkívüli alkotni.

A tehetséget éppen az jellemzi, hogy az átlagtól eltérő. Érzékenyebb, fogékonyabb, egyénibb, nehezen kezelhető, mert nem húzható kaptafára.

Különösen érvényes ez a kreatív gyerekekre. Torrance kísérletileg bizonyította, hogy a kreatív gyermekek 70%-a elvész az intelligencia-orientált oktatásban.

Nélkülözhetetlen tehát minden egyes tanuló igen alapos megismerése. A tehetséget elsősorban a tanulás és a munkatevékenység során ismerhetjük föl, de szükség van egyéb módszerekre is (tesztek, tiszta megfigyelés, klinikai módszer...). Megbízható eredményt többnyire csak a többféle eljárás együttes alkalmazása hoz.

Nem elegendő a diákok intelligencia-, illetve kreativitásfokának egy adott pillanatbani mérése, hanem figyelnünk kell a változást is. Így könnyebben kiszűrhetők azok, akik csupán az előnyösebb környezetük miatt látszanak tehetségesebbeknek.

Vannak olyan tehetséges tanulók, akik lassan gondolkodnak, vagy csak igen körülményesen tudják megfogalmazni válaszaikat. Rájuk úgy figyelhetünk föl, ha a versenyeken és egyéb felméréseken nem csupán az összteljesítményt értékeljük, hanem egy-egy feladat különösen eredeti, szép megoldását is, s néha „korlátlan" időt biztosítunk a megoldások elkészítéséhez.

Nagyon sok függ a tanár és a diák kapcsolatától, az órák légkörétől. A tanár sok esetben nem okosabb, csupán tapasztaltabb növendékénél. A pedagógus lépéselőnye kisebb diákok esetén nagyobbnak látszik, különösen ekkor kell tehát vigyázni a tanuló önállóságának megőrzésére, hiszen ekkor ő még elsősorban a nevelőjének tanul.

Nagyon fontos, hogy hagyjuk a gyermeket gondolkodni. Biztosítsuk, hogy minél több új feladatnál a legelső lépéseket teljesen önállóan tegye meg! Ne sürgessük! Ne engedjük, hogy a gyorsabban gondolkodók bekiabálják a megoldást! Ne elégedjünk meg sablonmegoldásokkal! A probléma érdekelje őket, ne a külső elismerés!

Segíti az alkotó gondolkodás fölismerését, fejlesztését, ha olyan feladatot is adunk, amelynek sokféle (esetleg végtelen sok) megoldása van, ha nem csupán válaszokat kérünk tőlük, hanem indoklásokat; kérdések, feladatok megfogalmazását is; ha egy-egy feladatot próbálunk velük átfogalmaztatni, megfordíttatni, általánosíttatni, specializáltatni. Ha meg-

tanítjuk őket ötleteik tárolására, rangsorolására; kapcsolatok keresésére látszólag össze nem függő dolgok között; rossz megoldások kijavítására; egy adott állítás érvényességi körének meghatározására; megváltozott feltételek következményeinek vizsgálatára; adott szimbólumok megfejtésére, célszerű új szimbólumok keresésére, ...

Ezeket az elveket, eljárásokat próbálom követni közel három évtizede. Eredményeképpen a legszebb megoldásokat nem én tanítottam diákjaimnak, hanem tőlük tanultam.

Íme néhány közülük:

a) Adott a négyzet mindegyik oldalán egy-egy pont. Szerkesztendő a négyzet.

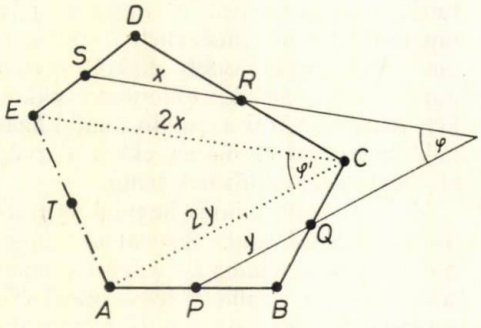
Felhasználható az ismert feladat, amely szerint a háromszög oldalfelező merőlegese és a szemközti szög felezője (ha nem egyenlő szárú a háromszög) a háromszög köré írható körön metszi egymást. A négyzet átlójának két pontja így általában könnyen megkapható, s az a megfelelő Thalész-körökből kimetsz négyzetcsúcsokat.

b) Adott a háromszög három oldalfelező merőlegesének egyenese és az egyik oldal egy pontja. Szerkesztendő a háromszög.

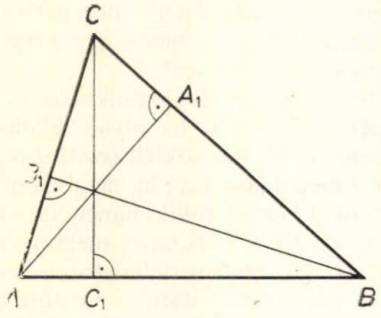
A pontot merőlegesen rávetítve a „hozzá tartozó" oldalfelező merőlegesre (f_1-re) a háromszög egyik oldalfelező pontját kapjuk (F_1-et). F_1 pontból f_2 egyenesre bocsátott merőleges f_3 egyenesből F_3 pontot, F_1 pontból f_3 egyenesre bocsátott merőleges f_2 egyenesből F_2 pontot metszi ki. A három oldalfelező pontból már a háromszög könnyen megkapható.

c) Bizonyítsuk be, hogy hegyesszögű háromszögben a háromszög magasságpontja kétszer olyan messze van az egyik csúcstól, mint a háromszög köré írható kör középpontja az adott csúccsal szemközti oldaltól!

A körülírható kör középpontja az oldalfelező pontok által meghatározott háromszög magasságpontja. Az a kétszeres nagyítás, amely az oldalfelező pontok által meghatározott háromszöget az eredeti háromszögbe viszi át, a vizsgált két szakaszt is egymásba viszi.



2. ábra



3. ábra

d) Szerkesszünk ötszöget, amelynek egy adott ötszög csúcsai az oldalfelező pontjai!

Bármely oldalszakasz hossza megszerkeszthető, ha észrevesszük az ábrán látható φ és φ' szögek egyenlőségét és felhasználjuk az ismert kapcsolatot: a háromszög középvonala fele a vele párhuzamos oldalnak.

A tanulókkal való differenciált foglalkozás akkor eredményes igazán, ha a különböző nehézségű feladatokat egyazon problémakörből választjuk, ezáltal az önálló vagy a csoportmunka eredményeinek ismertetése a többiek számára is érdekesebb, tanulságosabb lesz.

Például: akár egyszerre, akár a különböző nehézségi fokú feladatokat más-más csoportnak adva kitűzhető a következő feladatsorozat:

Legyenek az ABC hegyesszögű háromszög magasságvonalainak talppontjai rendre A_1, B_1, C_1!
Bizonyítsuk be a következő állításokat:

a) AB_1A_1B, BC_1B_1C és CA_1C_1A húrnégyszögek;

b) $ABC\triangle \sim AB_1C_1\triangle \sim BA_1C_1\triangle \sim CA_1B_1\triangle$;

c) $B_1C_1C\sphericalangle = \frac{B_1C_1A_1\sphericalangle}{2}$;

d) az eredeti háromszög oldalegyenesei a talpponti háromszög külső szögfelezői;

e) a hegyesszögű háromszög magasságpontja a talpponti háromszögébe írható kör középpontja;

f) a talpponti háromszöghöz hozzáírt körök középpontja az eredeti háromszög egy-egy csúcspontja;

g) egy háromszögbe írt kör középpontja és két hozzáírt kör középpontja tompaszögű háromszöget határoznak meg;

h) a tompaszögű háromszög magasságpontja a talpponti háromszögéhez hozzáírható egyik kör középpontja!

A tehetségkutatásra néha játékos módszerek is alkalmazhatók. Pl. az „országváros..." játék egyik változatában annak ki kell húznia a válaszát, aki olyan nevet írt, amely másnak is eszébe jutott. Hasonlóan egy-egy feladatmegoldásnál is előfordulhat néha, hogy csak az kap pontot, aki olyan utat talált, amilyent más senki. Többször alkalmazva az eljárást a valóban ötletes tanulókra figyelhetünk föl.

Összegezve

A társadalmi értékrend helyesbítése és egy, a szelekcióval bátrabban, igazságosabban élő iskolarendszer nélkül nehezen képzelhető el a tehetségkutatás és -gondozás fellendülése.

A döntő azonban az, hogy sikerül-e a pedagógusok összetételét, felkészültségét, szemléletét, módszerkultúráját lényegesen javítani.

A jó tanár és a tehetséggondozásra alkalmas tanár fogalma nem azonos. Vannak kiváló tanárok, akik inkább a felzárkóztatásra, az alapok maradéktalan elsajátíttatására alkalmasak.

A tehetségkutatásra és a tehetséggondozásra olyan tanár való, aki maga is képes intuícióra, kreativitásra; nem a saját gondolatmenetét erőlteti rá a tanítványaira, hanem bele tudja képzelni magát a tanuló gondolatmenetébe, tud bábáskodni egy-egy új megoldás, felfedezés létrehozásában.

DR. HORVÁTH MIKLÓS
tudományos munkatárs
ELTE, Budapest

Papposz egyik híres feladatának történetéből

Az a feladat, amit „3 vagy 4 egyenesre vonatkoztatott mértani hely" feladatának neveztek — és ma Papposz-probléma néven ismerünk — a matematikatörténet sok száz évén végigvonult. Cikkünknek az a célja, hogy e feladattal kapcsolatos néhány történeti vonatkozásról összefoglaló áttekintést adjon.

1. Papposz (IV. század) az alexandriai görög matematikus iskola — időben utolsó — nagy alakja volt. Mindössze egy műve, a „Szynagógé" („Gyűjtemény") maradt fenn, amelyet latin címén mint „Collectiones Mathematicae" szoktak emlegetni. Papposz e 8 könyvből (részből) álló művében összegyűjtötte —

és magas színvonalon kiegészítette, sőt tovább fejlesztette — mindazt, amit elődei matematikai munkáiban értékesnek talált. Növeli a Szynagógé jelentőségét az a tény is, hogy több ókori szerző eredményét csupán a benne megőrzött formában ismerjük.

A mű VII. könyve tartalmazza a legérdekesebb és a leggazdagabb anyagot (az analízis és szintézis módszerét, a szóban forgó Papposz-feladatot, a ma Guldinról elnevezett tételt stb.), amelyet maga Papposz az „analízis kincsestárának" nevezett. (Abban az időben az „analízis" mint módszer „fordított irányú munkát" jelentett.)

2. A Papposz-problémánál egy — mai értelemben vett — síkbeli mértani hely meghatározása a feladat. Ezért előzetesen ismernünk kell, hogyan osztályozta Papposz a — ma síkbelinek nevezett — mértani helyeket. Három fő csoportot különböztetett meg:

„locus planus" (síkbeli mértani hely): ide tartozott az egyenes és a kör;

„locus solidus" (térbeli mértani hely): ide sorolta a parabolát, az ellipszist és a hiperbolát, amelyeket közös néven kúpszeleteknek nevezett;

„locus linearis" (a mértani hely általános görbe vonal): pedig azoknak a görbéknek az összességét jelentette, amelyek az előző két csoportban nem szerepeltek.

A mértani helyeknek — és rajtuk keresztül a mai értelemben vett síkbeli mértani feladatoknak — ez a felosztása még a 17. században is általánosan elfogadott volt.

3. Papposz így fogalmazta meg a szóban forgó feladatot 3 vagy 4 egyenes esetére: (A cikkünkben előforduló idézetek zárójelben levő részei a pontosabb fogalmazást kívánják elősegíteni, azok latin megfelelője az eredeti szövegekben nem szerepel.)

„Ha 3 (— közös S síkban fekvő —) adott helyzetű egyeneshez (az S sík) egy és ugyanazon pontjából 3 (— az adott egyenesekkel —) adott szöget bezáró szakaszt húzok, és e szakaszok közül kettőnek a szorzata adott arányban van a harmadik négyzetével, akkor a (tekintett) pont egy meghatározott helyzetű locus soliduson, azaz a 3 kúpszelet egyikén van rajta. Ha pedig 4 (— közös S síkban fekvő —) adott helyzetű egyeneshez húzok (az S sík ugyanazon pontjából mindegyik egyeneshez, azokkal) adott szöget bezáró szakaszokat, és közülük kettőnek a szorzata adott arányban van a másik kettő szorzatával, akkor (az előző esethez) hasonlóan, a (szóban forgó) pont adott helyzetű kúpszeleten van rajta." ((1), VII. könyv, 251. oldal.)

4. A következőkben a feladatot általános esetben adjuk meg, amit Papposz is ismert, de mai jelölés- és kifejezésmódot használunk. Jelölje L_i egy S sík adott — legalább 3, de véges — számú, adott helyzetű egyenesei közül az i-ediket, legyen φ_i adott szög, d_i az adott S sík valamely P pontjából az L_i egyeneshez adott φ_i szögben húzott szakasz, $p:q$ adott arány, a pedig egy adott szakasz! Így a feladat: Határozzuk meg azoknak a P pontoknak az S-beli mértani helyét, amelyek — $2n-1$ (n legalább 3) számú adott egyenes esetén — a $(d_1 \cdot d_2 \cdots d_n):(d_{n+1} \cdot d_{n+2} \cdots d_{2n-1} \cdot a)=p:q$, illetve — $2n$ (n legalább kettő) számú adott egyenes esetén — a $(d_1 \cdots d_n):(d_{n+1} \cdots d_{2n})=p:q$ feltétellel vannak meghatározva. (A 3 adott egyenes esetén megfogalmazott feladat nem a $2n-1$ számú egyeneshez tartozó feladat speciális esete, hanem a 4 adott egyenes esetében kitűzött feladaté, ha ez utóbbiban pontosan két egyenes egybeesik.)

Papposz — bizonyítás nélkül — azt állította, hogy a 3 vagy 4 egyenes esetében a megoldás kúpszelet. 4-nél több adott egyenes esetében pedig kijelentette, hogy a kapott mértani hely formája ismeretlen. (I. h.)

5. Papposz említett művéből tudjuk az alábbiakat is ([1], 249—250. oldal):

E feladattal — 3 vagy 4 egyenes esetében — már Arisztaiosz (i. e. kb. 320.) és valamivel később Euklidész is foglalkozott.

Arisztaiosz „Solidi Loci" című 5 könyvből álló — Papposz idején még meglevő, de ma már elveszett — művében foglalkozott a kúpszeletekkel és a kérdéses feladattal.

Euklidész „Konika" (Kúpszeletek) című — már Papposz idejére is elveszett — 4 könyvből álló műve 3. könyvében összegezte a kúpszeletekkel kapcsolatos addigi ismereteket. Tárgyalta a 3 vagy 4 egyenesre vonatkoztatott mértani hely feladatát is. Vizsgálataiban Arisztaiosz eredményeire támaszkodott. A kérdéses feladat megoldását mindketten befejezetlenül hagyták.

6. Papposz hívja fel figyelmünket arra is, hogy e feladattal Apollóniosz (i. e. 260—190.) is foglalkozott, aki hosszabb időt töltött Alexandriában, Euklidész tanítványainál. „Konika" (Kúpszeletek) című; 8 könyvből álló fő műve — amelyből az első 4 könyv görögül, a további 3 arab fordításban maradt ránk, s a 8. elveszett — kora kiemelkedő tudományos alkotásainak egyike volt.

Apollóniosz a következőt írta említett művének előszavában:

„A 3. könyv sok csodálatos tételt tartalmaz, amelyek felhasználhatók a mértani helyek megszerkesztéséhez és meghatározásához, ha azok kúpszeletek. E tételek legtöbbje és legszebbje új. Ezeknek a tételeknek a felfedezése vezetett rá arra, hogy Euklidész nem dolgozta ki a 3 vagy 4 egyenes mértani helyének problémáját, s annak csak egy alkalomszerűen kiválasztott részletével foglalkozott — kevés sikerrel. A kérdéses feladatra ugyanis csak az újonnan felfedezett tételeim segítségével lehet teljes megoldást adni." ([2], I., 5. oldal.)

Apollóniosz fennmaradt művei azonban közvetlenül nem tartalmazzák a 3 vagy 4 egyenes esetén érvényes feladatot és annak megoldását. Az ilyen irányú kutatási eredmények azonban azt támasztják alá, hogy Apollóniosz ismerte e feladat megoldását, s annak bizonyítását is. Konika című művének 3. könyvében ugyanis a 3 egyenes esetére vonatkozó feladat megfordításának teljes bizonyítását adta. ([2], I., 53—56. tételek, 439—451. oldal.)

A fenti Apollóniosz-idézetet Papposz említett művében is megtaláljuk a következő megjegyzéssel kiegészítve:

„Valójában senki sem — még Apollóniosz sem — nyújtott többet annál, amit Euklidész elért (ebben a kérdésben)..." ([1], 250. oldal.)

7. A Papposz-probléma a 17. században ismét az érdeklődés középpontjába került. Egy holland történész, Jakob Gool 1631 végén Descartes figyelmébe ajánlotta Papposz feladatát.

Descartes — Papposz szóban forgó művét tanulmányozva — arra következtetett, hogy az ókori görögök egyike sem tudta Papposz feladatát megoldani. Arra gondolt, hogy e feladat megoldásával alátámaszthatja, hogy saját analitikus (algebrát használó) módszere nagyobb hatékonyságú, mint a görögök szintetikus — csupán geometriai fogalmakra alapozó — eljárása. Így Descartes Géométrie című művében a Papposz-probléma alapvető fontosságú példává vált.

A továbbiak megvilágításához szükségünk lesz a Géométrie néhány részletére, amit az alábbiakban foglalunk össze.

8.*a)* Descartes bírálta azt a korábbi, görög álláspontot, hogy a geometriai szerkesztési feladatok megoldásánál csupán körzőt és vonalzót használhatunk. Véleménye szerint igaz ugyan, hogy a problémák megoldásakor mindig a legegyszerűbb görbéket kell — szerkesztési segédeszközként — alkalmazni, de ez nem jelenti azt, hogy bizonyos összetettebb görbéket — és a felhasználásukkal elvégzett szerkesztéseket — ne fogadjunk el a geometriában, azaz ne tekintsük azokat geometriaiaknak.

b) Descartes a létező görbéknek csak egy részét — az ún. geometriai (a mai algebrai) görbéket — fogadta el a geometriában, a többit — az ún. mechanikai (a mai transzcendens) görbéket — nem. Szerinte geometriai görbét nyerhetünk folytonos mozgással, pontonkénti meg-

adással vagy olyan eljárással, amelyben a szerkesztéshez zsineget használunk. Mindegyik esetben azonban számára a geometriában nemkívánatos — azaz mechanikai — görbék is adódhatnak, ezért korlátozó feltevésekre van szükség. Ezeknek a kikötéseknek az a közös alapja, hogy a fenti három eljárás során ne fordulhasson elő szakasz és görbeív összemérhetetlensége. (Ezt az első esetben úgy érte el, hogy a görberajzoló szerkezetnél csak olyan — egymás utáni — mozgásokat engedett meg, amelyeknél a később következőket az előző mozgások teljesen meghatározzák; a másodikban úgy, hogy a keresett görbe tetszőleges — és nemcsak speciális — pontjait meg lehessen szerkeszteni; a harmadik esetben pedig az volt a kikötése, hogy a szerkesztés során a felhasznált zsineg csak szakaszokat alkothat, görbeíveket nem.)

c) Descartes tehát általánosította a geometriai szerkesztés korábbi, euklidészi fogalmát. A geometriában tehát mindazokat a szerkesztéseket megengedte, azaz geometriaiaknak tartotta, amelyeket — a fentebb definiált — geometriai görbék metszésével lehetett végrehajtani.

d) Descartes határozottan állította, de nem bizonyította, hogy minden geometriai görbének algebrai egyenlete van. ([3], 319. oldal.) A fordított kérdésre — minden algebrai egyenlet geometriai görbét jellemez-e — a Géométrie alapján Descartes implicit, igenlő válasza állapítható meg. ([4], 322. és 324. oldal.)

Megjegyezzük, hogy a Géométrie-ből az is kiderül, hogy Descartes nem tekintette a görbe egyenletét a görbe kielégítő — azaz számára a geometriában elfogadható — jellemzésének. ([4], 297. és 322. oldal.) Úgy érezte, hogy minden esetben tényleges mechanikai konstrukcióval kell a görbe létezését igazolnia. ([5], 88. oldal.)

9. Descartes a Papposz-probléma általános megoldását a — három könyvből (részből) álló — Géométrie első könyvében vázolta ([3], 309—314. oldal), amit az alábbiakban összegezünk.

Legyen $y=d_1$, x pedig az L_1 egyenes egy rögzített A pontja, valamint az L_1 és d_1 metszéspontja által meghatározott szakasz! Egyszerű geometriai érveléssel bebizonyította, hogy $d_i=a_ix+b_iy+c_i$, ahol a_i, b_i és c_i konstansok. Ezért a feladat feltételét kifejező fenti összefüggéseket (lásd 4. pont!) x és y változókat tartalmazó algebrai egyenletek reprezentálják.

Descartes ezután leírta, hogy a probléma feltételeit kielégítő pontokhoz úgy juthatunk, hogy y tetszőlegesen választott értékeihez megszerkesztjük a hozzájuk tartozó x értékeket. Ezzel a Papposz-feladat descartesi megoldása (algebrai) egyenletek gyökeinek megszerkesztésére redukálódott.

A feladatban szereplő egyenesek száma és a keresett mértani hely pontjainak megszerkesztésére használt geometriai görbék fajtái között Descartes az alábbi összefüggést adta meg ([3], 313—314. oldal):

a) 3, 4 vagy 5 (de 5 nem párhuzamos) adott egyenes esetén a megfelelő egyenlet x-ben legfeljebb másodfokú, ezért a keresett mértani hely pontjai körzővel és vonalzóval megszerkeszthetők.

b) 5 párhuzamos, vagy 6, 7, 8, illetve 9 (de 9 nem párhuzamos) adott egyenes esetén a megfelelő egyenlet x-ben legfeljebb 4-edfokú, és x értékei kúpszeletek metszésével szerkeszthetők.

c) 9 párhuzamos, vagy 10, 11, 12, illetve 13 (de 13 nem párhuzamos) adott egyenes esetén a megfelelő egyenlet x-ben legfeljebb 6-odfokú, s az x megszerkesztéséhez már a kúpszeleteknél komplikáltabb (geometriai) görbéket kell használni.

Az eddigi esetekből felismerhető szabályosság a további esetekben is folytatódik, állapította meg Descartes. ([3], 313—314. oldal.)

Papposz feladatának vázolt megoldása jól mutatja, hogy a geometriai görbék két különböző szerepet játszhatnak a mértani hely feladatok descartesi meg-

oldásában: egy geometriai görbe előfordulhat, mint egy probléma megoldása, de szerepelhet úgy is, mint egy szerkesztési feladat megoldásának eszköze. Az előző esetben Descartes megelégszik a görbe pontonkénti előállításával. Az utóbbiban azonban szükséges, hogy a (geometriai) görbét — Descartes által elfogadott — folytonos mozgással kapjuk.

Descartes a Géométrie második könyvében részletesen megoldotta a Pappusz-problémát 3 és 4 adott egyenesre, majd két speciális esetet tárgyalt 5 adott egyenes esetén, amelyekből 4 egymással párhuzamos (és közülük bármely két szomszédos egyenes távolsága a), egy pedig rájuk merőleges, továbbá — a korábbi jelölésekkel — $\varphi_i = 90°$, $p:q=1$. A két eset a következő:

a $d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 = d_4 \cdot d_5 \cdot a$ feltételt teljesítő mértani hely $y^3 - 2ay^2 - a^2y + 2a^3 = axy$ (lásd pl. (6)), ha a párhuzamos egyenesek L_1, L_2, L_4 és L_3 (ebben a sorrendben), és parabola az L_2, L_4, L_5, L_3 (ebben a sorrendben) esetben.

Descartes azt állította, hogy az első speciális eset megoldásgörbéjét, az ún. „parabolikus konhoidot", vagy más néven Descartes-parabolát egy általa megengedett, azaz geometriai görbét előállító — az alábbi ábrán vázolt — mechanikus szerkezet rajzolja le.

Descartes így írta le eszköze működését, s igazolta állítását:

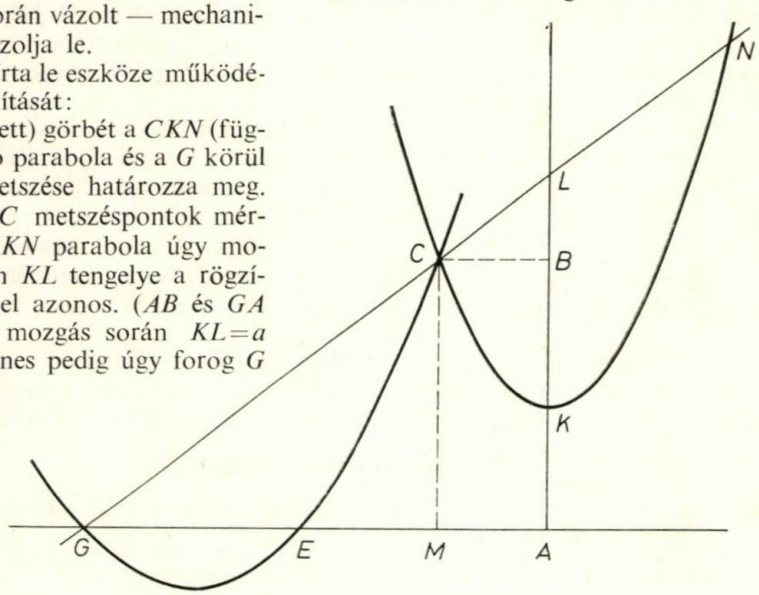
„A CEG (keresett) görbét a CKN (függőlegesen) mozgó parabola és a G körül forgó egyenes metszése határozza meg. (A CEG görbe C metszéspontok mértani helye.) A CKN parabola úgy mozog, hogy közben KL tengelye a rögzített AB egyenessel azonos. (AB és GA merőlegesek.) A mozgás során $KL=a$ állandó. Az egyenes pedig úgy forog G körül, hogy közben mindig áthalad az L ponton. Legyen $GA=2a$, CB vagy $MA=y$, CM vagy $AB=x$. A GMC és a CBL háromszögek hasonlóságából következik, hogy $(2a-y):x=y:BL$, azaz $BL=xy:(2a-y)$. De $KL=a$, ezért $BK=a-xy:(2a-y)$. Mivel (a parabola $BC^2=a\cdot BK$ egyenletű, azaz) $BK:BC=BC:a$, azt kapjuk, hogy $y^3-2ay^2-a^2y+2a^3=axy$." ([3], 337. oldal.)

Descartes ezzel bebizonyította fenti állítását, mert kimutatta, hogy a látott módon lerajzolható görbe egyenlete megegyezik a korábbi, y-ban harmadfokú egyenlettel. (Descartes az N metszéspontok analitikus tárgyalásával nem foglalkozott.)

Descartes — a most bizonyított speciális eset általánosításaként — azt állította, hogy tetszőlegesen adott geometriai görbe (algebrai) egyenletéhez mindig tartozik egy — alkalmas számú és helyzetű egyenesre vonatkozó — olyan Pappusz-feladat, amelynek megoldását adó mértani hely egyenlete éppen a szóban forgó adott egyenlet. ([3], 324. oldal.)

10. Newton volt az első, aki 1664-ben bebizonyította ennek az állításnak a helytelenségét. ([7], 340—344. oldal.)

Newton 1677-ben algebrai előadásai-



hoz anyagot keresve, újra foglalkozott a Géométrie-vel. Abban terjedelmes idézeteket talált Papposz Collectioneséből, amelyek arra ösztönözték, hogy Papposz eredeti művéhez forduljon. Az további görög forrásokra, többek között Apollóniosz Konikájára hívta fel figyelmét. Az említett művek tanulmányozásának hatására írta Newton geometriai kéziratait ([8], [9], [10]) 1678—79 folyamán. E kéziratok egyes részei ismét bírálták Papposz feladatának descartesi megoldását. Descartes ugyanis büszkén kijelentette e feladatról:

„Papposz azt írta, hogy a görögök úgy gondolták, hogy ezt a problémát teljesen megoldották. Véleményem szerint ezt én hajtottam végre." ([3], 309. oldal.)

Newton nem értett egyet ezzel az állítással. Többre értékelte Papposz feladatának a görögök által kívánt szintetikus megoldási módszerét, mint a kérdés analitikus — Descartes által adott — megoldását. Newton így írt ezekről a gondolatairól:

„Descartes e probléma befejezőjének jelenti ki magát, mintha olyasmit ért volna el, amit a görögök kerestek, s amire már Apollóniosz is (hiába) szentelte a kúpszeletekről írt művét. Bár minden tiszteletem ilyen kiváló emberé (mint Descartes), meg vagyok róla győződve, hogy a görögök számára ez a kérdés egyáltalán nem maradt rejtély (ti. abban az esetben, ha a megoldás locus solidus). Papposz ugyanis ismerte, hogyan kell 5 adott (általános helyzetű) ponton át ellipszist szerkeszteni ([1], VIII. könyv, 13. tétel, 465—466. oldal.), s a gondolatmenet más kúpszeletek esetében is ugyanaz. ...A görögök módszere sokkal elegánsabb, mint Descartesé. Descartes ugyanis olyan algebrai számítással kapta eredményét, amely nagyon hosszadalmas, fárasztó, sőt érthetetlen lenne, ha — a görögök írásaiban szokásos módon — szavakba öntenénk. A görögök a kérdés megoldásánál bizonyos egyszerű arányokkal dolgoztak, mert azt tartották, hogy semmilyen más stílusban való leírás nem érdemli meg, hogy elolvassák. Ebből következik, hogy törölték azt az analízist, aminek segítségével megtalálták szerkesztéseik bizonyítását. Megkísérlem felépíteni felfedezésüket, hogy (alátámaszszam, hogy) a kérdés megoldását ismerték.„ ([9], 274—276. oldal.)

Sajnos Newton is azt a — 17. században — divatos, de végül is tarthatatlan nézetet vallotta, hogy a görögök szintetikus bizonyításaik során szándékosan elhallgatták azt a titkos módszerüket, amellyel a matematikai bizonyításaikat felfedezték. (Arkhimedésznek valóban volt egy — csak 1906-ban megtalált levelében leírt — mechanikai módszere geometriai feladatok megoldására.)

Newton a [10] alatti kéziratában a Papposz-probléma szintetikus megoldását adta 4 egyenes esetére, s — Apollóniosz Konikája 3. könyvének 17. és 18. tételei alapján — bebizonyította, hogy a kérdéses mértani hely kúpszelet.

Newton idézett geometriai kéziratainak a görögök értekezéseihez hasonló külső formája csak felszín. E kéziratok nem antik tanulmányok, hanem a mértani helyek természetének olyan új nézőpontját tartalmazzák, amely a kúpszeletek projektív tulajdonságainak — később kialakuló — Poncelet-féle elméletében teljesedett ki.

IRODALOM

[1] *Pappi Alexandrini Mathematicae Collectiones, a F. Commandino, Bononiae,* 1660.

[2] *Apollonii Pergaei quae graece exstant cum commentariis antiquis,* I. L. Heiberg, I—II. k. Teubner, Stuttgart, 1974.

[3] DESCARTES, R.: *Discours de la méthode.* Leiden, 1637.
E mű 3. függeléke: La Géométrie.

[4] BOS, H. J. M.: *On the Representation of Curves in Descartes' Géométrie.* Archive for History of Exact Sciences, 1981. 24. k. 4. szám.

[5] BOYER, C. B.: *History of Analytic Geometry.* New York, 1956.

[6] RIBNYIKOV, K. A.: *A matematika története.* Budapest, 1968.

[7] NEWTON, I.: *Errores Cartesij Geometriae, The mathematical Papers of Isaac Newton, ed. T. D. Whiteside.* Cambridge, I—VIII, 1967—1980, (a továbbiakban NMP), IV. k. 336—345. oldal.
[8] NEWTON, I.: *Questionum solutio Geometrica, NMP.* IV. k. 250—268. oldal.
[9] NEWTON, I.: *Veterum loca solida restituta, NMP.* IV. k. 274—282. oldal.
[10] NEWTON, I.: *Solutio problematis Veterum de loco solido, NMP.* IV. k., 282—320. oldal.

GÁSPÁR GYULA
tanár
Miskolc

A számítógépek elméleti alkalmazásai

Sokan azt tartják, hogy a számítógépek „csak" gyakorlati problémák megoldására alkalmasak: képesek nagy mennyiségű adat gyors és nagy pontosságú kiszámítására, de például — gépi jellegükből adódóan — képtelenek általános érvényű elméleti matematikai tételek bizonyítására.

Kétségtelen, hogy ez — legalább is ma még — lényegében igaz megállapítás, még akkor is, ha az elmúlt évtizedben több rendkívül nehéz matematikai probléma megoldásában vették igénybe számítógépek (illetve mondjuk inkább: programok) segítségét. E téren talán a legnevezetesebb a matematikusok ostromainak mintegy 140 évig ellenálló, ún. *négyszín-sejtés,* mely szerint minden (sík-, vagy gömb-) térkép helyes kiszínezéséhez elég négy különböző szín. (A helyes színezés azt jelenti, hogy két szomszédos, azaz közös határszakasszal rendelkező ország nem lehet azonos színű.) Elméleti módszerekkel nemrég bebizonyították, hogy ha az állítás igaz minden olyan térképre, melyen az országok száma nem halad meg egy bizonyos értéket, akkor az állítás minden térképre igaz. A meghatározott számú (vagy kevesebb) országra vonatkozó térképeket pedig egy számítógép-program „előállította", és kimutatta azok kiszínezhetőségét. Így sikerült tehát a négyszín-sejtést, illetve most már: a négyszín-tételt bebizonyítani a számítógép aktív segítségével.

Jómagam sokáig idegenkedtem a számítógépektől, mivel az elméleti matematika jobban érdekel, mint a gyakorlati. Egyszer aztán úgy adódott, hogy lehetőségem nyílt jobban megismerni a programozást. A miskolci egyetem Olajtermelés II. Tanszékén (dr. Szilas A. Pál egyetemi tanár pártfogása révén) először csak mint egy érdekes játékkal, később pedig már mint hasznos segítőtárssal foglalkoztam egy HEWLETT-PACKARD 9830A típusú angol számítógéppel.

Mint általában mindenki, aki programozni tanul, én is elkészítettem a szokásos „tanulóprogramokat", azaz — többek közt — egy lineáris egyenletrendszereket megoldó programot, mely $n=2, 3, \ldots, 13$ esetére oldott meg n egyenletből álló, n ismeretlenes rendszereket.

A Cramer-szabályt alkalmaztam, amely alapján az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

egyenletrendszer $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \ldots a_{2n} \\ \vdots \quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n1} a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$ determinánsában a k-adik oszlop helyébe

$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$-et téve a kapott D_k determinánsokból egyszerűen kaphatjuk x_k értékét:

$$x_k = \frac{D_k}{|A|} \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \text{ feltéve, hogy } |A| \neq 0.$$

A program az $|A|$, D_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ determinánsok kiszámítását $(n-1) \times (n-1)$-es aldeterminánsok kiszámítására vezette vissza, majd azokat újabb, már csak $(n-2) \times (n-2)$-es aldeterminánsokéra stb. Meglehetősen gazdaságtalan volt tehát ez a (direkt) módszer, hiszen minden determinánst $n \cdot (n-1) \cdot \cdots 2 = n!$ lépésben számolt ki, s így végül $(n+1) \cdot n! = (n+1)!$ szorzást végzett (valamint nagyságrenddel kisebb számú összeadást). De a program működött, és számomra akkor csak ez volt a fontos.

Az együtthatók megadására a kézi betápláláson kívül még két mód volt. Hogy a program működőképességét gyorsan is bemutathassam, két, nem túl ötletes, de a célra alkalmasnak tűnő „együttható-gyártó" képletet alkalmaztam:

(1) $a_{ij} = \sin\left(\frac{\pi}{i} + \frac{\pi}{j}\right)$, illetve (2) $a_{ij} = \lg(i+j)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$.

És ekkor ért a meglepetés! (1) esetén $n = 3$-ra a gép villámgyorsan közölte, hogy az egyenletrendszer determinánsa 0, azaz (legalább is egyértelműen) nem oldható meg. Ugyanezt tette $n = 4, 5, \ldots, 11$-re is (természetesen egyre csökkenő sebességgel), $n = 12$-re 10^{-73}, $n = 13$-ra pedig 10^{-41} körüli számot közölt $|A|$ értékeként (kerekítési hibák!). Jogos volt tehát a feltevés (a *sejtés*), hogy $|A| = 0$, ha $n \geqq 3$, és az a_{ij} együtthatókat (1) alapján értelmezzük.

A determinánsokkal kapcsolatos néhány összefüggés, valamint trigonometriai azonosságok alkalmazásával ezt könnyen be is lehet *bizonyítani* (hasonlóan az $a_{ij} = \cos\left(\frac{\pi}{i} + \frac{\pi}{j}\right)$ együtthatókra is). Így kaptam azt a *tételt*, amelynek alapján a **996.** feladat készült (A Matematika Tanítása 1982/2, 58. oldal).

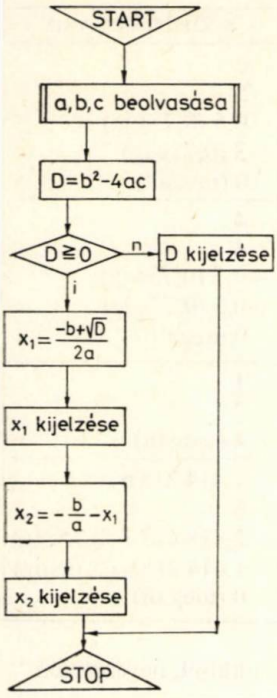
A (2) együtthatók alkalmazása esetén kapott $|A|$ determinánsok viselkedése is figyelemre méltó, ugyanis 0-hoz közelítenek, ha az n értékét növeljük. Ezt a sejtést azonban még nem sikerült bizonyítanom.

1982 júliusában két PTK—1050-es programozható zsebszámológép érkezett az iskolánkba (és — gondolom — még sok más általános iskolába is). Tudomásom szerint fő feladatuknak a matematikatanárok munkájának segítését szánták. Már csak ezért is köszönet illeti azokat, akik lehetővé tették, hogy az általános iskolák is hozzájuthassanak ilyen gépekhez. Ennél azonban még sokkal több lehetőség rejlik bennük általános iskolai szinten is (erre később még visszatérek).

Miután megismertem a gép kezelését, a használható utasításokat, és néhány egyszerű programot is készítettem már, kíváncsi lettem arra, hogy milyen nagyságrendű feladattal képes megbirkózni. (Mint ismeretes, a gép 50 lépésig programozható, és pl. a „10+2=" utasítás is már 5 lépést jelent: „1", „0", „+", „2", „=". Elég szűkösek tehát a lehetőségek.)

Arra gondoltam, hogy az általános másodfokú egyenlet megoldása éppen megfelelő feladat lesz. Így kaptam a következő programot:

$ax^2+bx+c=0$ ① ② ③ $\quad D=b^2-4ac$ ④ $\quad x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ ⑤ $\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=-\frac{b}{a}-x_1$ ⑥ (memóriarekeszek)

blokkdiagram:	*utasítások:*	*megjegyzések:*
	KI/BE LRN	a gép felkészítése a program megtanulására,
	STO 1 R/S STO 2 R/S STO 3	a, b, c elhelyezése az ①, ②, ③ rekeszekben,
	RCL $2x^2-4$XRCL 1XRCL 3 =	D értékének kiszámítása,
	INV 2nd $x \geqq t$	ha $D<0$, a program leáll (D értéke a kijelzőben),
	R/S	ha $D \geqq 0$, D értéke a ④ rekeszbe kerül,
	STO 4	
	RCL $2\,{}^{+}/_{-}+$RCL $4\sqrt{x})\div$ (2XRCL 1)=	x_1 kiszámítása,
	2nd Pause STO 5	x_1 0,75s-ig látható, $x_1 \rightarrow$ ⑤,
	(RCL $2\div$ RCL $1+$RCL $5)\,{}^{+}/_{-}$	x_2 kiszámítása,
	2nd Pause STO 6	x_2 0,75s-ig látható, $x_2 \rightarrow$ ⑥,
	0	a kijelzőbe 0 kerül,
	R/S RST	leállás, visszaállítás (felk. újabb futtatásra),
	LRN RST	a tanulás vége, visszaállítás (felk. az első futtatásra).

A program 48 lépésből áll. Négy példa futtatásra (a következő oldalon).

Igen ám, de az ember előbb-utóbb megunja, hogy „csak úgy" másodfokú egyenleteket oldjon meg! Így hát azzal szórakoztam, hogy az $x^2+5x-6=0$ egyenlet ($a=1$, $b=5$, $c=-6$) megoldása után az $a=1$ értéket meghagytam, x_1 értékét b, x_2 értékét pedig c helyébe tettem: ⑤ → ②, ⑥ → ③, majd a program lefutása után ugyanígy stb.

Ezt az egyenlet-sorozatot kaptam (az együtthatókat az áttekinthetőség kedvéért kerekítve adom meg):

(3)

$$x^2+5x-6=0,\qquad x^2+1{,}09x-2{,}09=0,$$
$$x^2+x-6=0,\qquad x^2+x-2{,}09=0,$$
$$x^2+2x-3=0,\qquad x^2+1{,}03x-2{,}03=0,$$
$$x^2+x-3=0,\qquad x^2+x-2{,}03=0,$$
$$x^2+1{,}3x-2{,}3=0,\qquad x^2+1{,}01x-2{,}01=0 \text{ stb.}$$
$$x^2+x-2{,}3=0,$$

Mintha b értéke 1-hez, c-é pedig (-2)-höz tartana! *(Sejtés.)* Az egyéb szabályszerűségek, azaz hogy minden második b értéke 1, a c-k pedig párosával egyenlők,

Egyenlet	Együtthatók	Gyökök	Futtatás	
			billentyűzés	a kijelzőben van
$2x^2+5x-3=0$	$a=2$ $b=5$ $c=-3$	$x_1=\frac{1}{2}$ $x_2=-3$	2R/S 5R/S 3+/_R/S	2 5 0.5 (0,75s-ig) −3 (0,75s-ig) 0 (megáll)
$4x^2+4x+1=0$	$a=4$ $b=4$ $c=1$	$x_1=x_2=-\frac{1}{2}$	4R/S 4R(S) (vagy: R(S)) 1R/S	4 4 −0.5 (0,75s-ig) −0.5 (0,75s-ig) 0 megáll
$x^2+2x+2=0$	$a=1$ $b=2$ $c=2$	nincs $(D=-4)$	1R/S 2R/S 2R/S (vagy: R (S))	1 2 −4 (megáll)
$\sqrt{2}x^2-6x+4\sqrt{2}=0$	$a=\sqrt{2}$ $b=-6$ $c=4\sqrt{2}$	$x_1=2\sqrt{2}$ $x_2=\sqrt{2}$	RST $2\sqrt{x}$ R/S 6+/_ R/S 4 X $2\sqrt{x}$ = R/S	1.414 213 6 −6 2.828 427 1 (0,75s-ig) 1.414 213 6 (0,75s-ig) 0 (megáll)

— mint később kiderült — csak a kezdeti egyenlet különleges voltából, nevezetesen $x_1+x_2=-1$-ből következnek.

Most már *tudatos* kísérleteket végeztem, és eredménnyel; íme:

$x^2-6x-8=0$, $x^2+0{,}2x+0{,}001=0$, $x^2+100x+200=0$,

$x^2+7{,}1x-1{,}1=0$, $x^2-0{,}005x-0{,}195=0$, $x^2-2{,}04x-98{,}96=0$,

$x^2+0{,}15x-7{,}27=0$, $x^2+0{,}444x-0{,}439=0$, $x^2+10{,}97x-8{,}93=0$,

$x^2+2{,}62x-2{,}77=0$, $x^2+0{,}477x-0{,}921=0$, $x^2+0{,}76x-11{,}73=0$,

(4) $x^2+0{,}81x-3{,}43=0$, (5) $x^2+0{,}750x-1{,}227=0$, (6) $x^2+3{,}07x-3{,}83=0$,

$x^2+1{,}49x-2{,}30=0$, $x^2+0{,}794x-1{,}547=0$, $x^2+0{,}95x-4{,}02=0$,

$x^2+0{,}94x-2{,}44=0$, $x^2+0{,}908x-1{,}702=0$, $x^2+1{,}58x-2{,}54=0$,

$x^2+1{,}15x-2{,}10=0$, $x^2+0{,}927x-1{,}835=0$, $x^2+0{,}99x-2{,}57=0$,

$x^2+0{,}98x-2{,}14=0$, $x^2+0{,}968x-1{,}896=0$, $x^2+1{,}18x-2{,}17=0$,

$x^2+1{,}05x-2{,}03=0$, $x^2+0{,}975x-1{,}943=0$, $x^2+0{,}996x-2{,}180=0$,

$x^2+0{,}99x-2{,}05=0$, $x^2+0{,}989x-1{,}965=0$, $x^2+1{,}060x-2{,}056=0$.

Akadt persze olyan kezdőegyenlet is, mely (a valós számok között) nem volt megoldható, de olyan egy sem, melynél a „lánc" később szakadt volna meg megoldhatatlanság miatt.

Nekiültem, hogy megfogalmazzam a pontos állítást, és azt bebizonyítsam. Nem volt könnyű, de végül mégis megszületett az alábbi

Tétel:

Legyen az $x^2+b_0x+c_0=0$ ($b_0\neq 0$, $c_0\neq 0$ tetszőleges valós számok) egyenlet a valós számok körében megoldható, és legyenek a gyökei b_1 és c_1 ($b_1\geqq c_1$). Tegyük fel továbbá, hogy az $x^2+b_1x+c_1=0$ egyenlet is megoldható a valós számok körében. Ekkor az $x^2+b_ix+c_i=0$ egyenlet is megoldható, ahol b_i és c_i ($b_i\geqq c_i$) az $x^2+b_{i-1}x+c_{i-1}=0$ egyenlet gyökei ($i=2, 3, 4, \ldots$), továbbá $(b_n)\to -1$ és $(c_n)\to -2$, ha $n\to +\infty$.

Bizonyítás:

I. Először azt igazoljuk, hogy $b_i>0$ és $c_i<0$ valós számok ($i\geqq 3$). Az $x^2+b_{i-1}x+c_{i-1}=0$ egyenlet gyökeire (ha léteznek):

$$(7)\qquad b_i=\frac{-b_{i-1}+\sqrt{b_{i-1}^2-4c_{i-1}}}{2},\qquad c_i=\frac{-b_{i-1}-\sqrt{b_{i-1}^2-4c_{i-1}}}{2}\quad (i=1,2,3,\ldots).$$

A következőket használjuk fel ($i=1, 2, 3, \ldots$):

(8) Ha $b_{i-1}>0$ és $c_{i-1}<0$, akkor $b_i>\dfrac{-b_{i-1}+\sqrt{b_{i-1}^2}}{2}=0$ és

$$c_i<\frac{-b_{i-1}-\sqrt{b_{i-1}^2}}{2}<0.$$

(9) Ha $b_{i-1}<0$ és $c_{i-1}<0$, akkor $b_i>\dfrac{0+\sqrt{0}}{1}=0$ és

$$c_i<\frac{-b_{i-1}-\sqrt{b_{i-1}^2}}{2}=\frac{|b_{i-1}|-|b_{i-1}|}{2}=0.$$

(10) Ha $b_{i-1}>0$ és $c_{i-1}>0$, akkor $b_i<\dfrac{-b_{i-1}+\sqrt{b_{i-1}^2}}{2}=0$ és $c_i\leqq\dfrac{-b_{i-1}}{2}<0.$

(11) Ha $b_{i-1}<0$ és $c_{i-1}>0$, akkor $b_i\geqq\dfrac{-b_{i-1}+\sqrt{0}}{2}>0$ és

$$c_i>\frac{-b_{i-1}-\sqrt{b_{i-1}^2}}{2}=0.$$

Nyilvánvaló az is, hogy $c_i<0$ esetén $x^2+b_ix+c_i=0$ gyökei valósak, mert diszkriminánsa $b_i^2-4c_i>0$. Ezért ha $i=1$-re a b_0, c_0 számokra (8), (9), (10) valamelyike áll fenn, akkor $c_1<0$, és a továbbiakban is — (8) és (9) alapján — $c_i<0$ ($i\geqq 2$), tehát mindegyik egyenletnek valósak a megoldásai. Ha $i=1$-re a (11) eset áll fenn, akkor $i=2$-re (10) teljesül (b_2 és c_2 a feladat alapján létezik), tehát $c_i<0$ ($i\geqq 2$), azaz ismét csak valósak az összes egyenlet megoldásai.

Továbbá ha valamely i-re ($i=1, 2, 3, \ldots$) sorra a (11), (10), (9), (8) eset áll fenn, akkor a következő i-re sorra a (10), (9), (8), (8). Ezért $i=0$-ból kiindulva azt kapjuk, hogy $i\geqq 3$ esetén mindenképpen a (8) eset áll fenn, tehát $b_i>0$ és $c_i<0$ ($i\geqq 3$).

II. A (b_n) és a (c_n) sorozatok konvergenciájának bizonyításához a következő ismert konvergenciakritériumot szeretnénk alkalmazni: felülről (alulról) korlátos és monoton növekvő (csökkenő) sorozat konvergens.

Kiindulva azonban pl. az $x^2+10x-1=0$ egyenletből sorra azt kapjuk, hogy:

$$b_0 = 10 \quad \text{és} \quad c_0 = -1;$$

$$b_1 \approx 0{,}1 \quad \text{és} \quad c_1 \approx -10{,}1;$$

$$b_2 \approx 3{,}13 \quad \text{és} \quad c_2 \approx -3{,}23;$$

$$b_3 \approx 0{,}82 \quad \text{és} \quad c_3 \approx -3{,}95;$$

$$b_4 \approx 1{,}62 \quad \text{és} \quad c_4 \approx -2{,}44;$$

$$b_5 \approx 0{,}95 \quad \text{és} \quad c_5 \approx -2{,}57;$$

$$b_6 \approx 1{,}20 \quad \text{és} \quad c_6 \approx -2{,}15 \text{ stb.},$$

azaz sem (b_n), sem (c_n) nem monoton. Viszont $b_0>0$ és $c_0<0$ esetén a (b_{2n}) és a (b_{2n+1}) sorozatok monotonnak tűnnek. Most és a későbbiekben előforduló indexekről tegyük fel, hogy 3-nál nem kisebbek, ezért **I.** alapján $b_i>0$ és $c_i<0$.

Igazoljuk, hogy

a) $b_i>1$ esetén $b_{i+2}<b_i$ és $b_{i+2}>1$;
b) $b_i<1$ esetén $b_{i+2}>b_i$ és $b_{i+2}<1$;
c) $b_i=1$ esetén $b_{i+2}=1$.

A másodfokú egyenlet megoldóképletének ismételt alkalmazásával:

$$(12) \qquad b_{i+2} = \frac{-\dfrac{-b_i+\sqrt{b_i^2-4c_i}}{2}+\sqrt{\dfrac{2b_i^2-2b_i\sqrt{b_i^2-4c_i}-4c_i}{4}+2b_i+2\sqrt{b_i^2-4c_i}}}{2}.$$

Jelölje R a $>$, $<$, $=$ reláció bármelyikét. Ekkor (12) alapján a

$$(13) \qquad b_{i+2} \mathrm{R} b_i$$

relációval sorra ekvivalensek a következő relációk: (szorozva 4-gyel és hozzáadva $(-b_i+\sqrt{b_i^2-4c_i})$-t)

$$\sqrt{2b_i^2-2b_i\sqrt{b_i^2-4c_i}-4c_i}+8b_i+8\sqrt{b_i^2-4c_i}\ \mathrm{R}\ 3b_i+\sqrt{b_i^2-4c_i},$$

(négyzetre emelve — mindkét oldal pozitív! — és rendezve)

$$8b_i-8b_i^2\ \mathrm{R}\ \sqrt{b_i^2-4c_i}\cdot(8b_i-8),$$

(osztva 8-cal és a bal oldalon b_i-t kiemelve)

$$(14) \qquad b_i(1-b_i)\ \mathrm{R}\sqrt{b_i^2-4c_i}\cdot(b_i-1).$$

Hasonlóan a

$$(15) \qquad b_{i+2}\ \mathrm{R}\ 1$$

relációval ekvivalens végül is a

$$(16) \qquad b_i\ \mathrm{R}\ 1.$$

Így (13) és (14), valamint (15) és (16) ekvivalenciáját felhasználva:

a) $b_i>1$ esetén $b_{i+2}>1$, továbbá (14) bal oldala negatív, jobb oldala pozitív, tehát benne R:„$<$”, s így $b_{i+2}<b_i$;

b) $b_i<1$ esetén $b_{i+2}<1$, továbbá (14) bal oldala pozitív, jobb oldala negatív, tehát benne R:„>", s így $b_{i+2}>b_i$;

c) $b_i=1$ esetén $b_{i+2}=1$, továbbá (14) mindkét oldala 0, tehát benne R:„=", s így $b_{i+2}=b_i$, ami $b_i=b_{i+2}=1$ miatt tényleg igaz.

Következésképpen vagy $b_i>b_{i+2}>b_{i+4}>\ldots>1$, vagy $b_i<b_{i+2}<b_{i+4}<\ldots<1$, vagy $b_i=b_{i+2}=b_{i+4}=\ldots=1$ (minden $i\geqq 3$-ra), tehát (b_{2n})-re és (b_{2n+1})-re a konvergenciakritérium teljesül, tehát $(b_{2n})\to b''$, $(b_{2n+1})\to b'$, ahol $b', b''\geqq 0$. (Most és a továbbiakban a konvergenciát $n\to+\infty$-re értjük.)

III. A másodfokú egyenlet gyökei és együtthatói közti összefüggések alapján:

$$(17)\qquad b_{2n}+c_{2n}=-b_{2n-1} \quad \text{és} \quad (18)\quad b_{2n+1}+c_{2n+1}=-b_{2n},$$

tehát a (c_{2n}) és a (c_{2n+1}) sorozatok is konvergensek, és $(c_{2n})\to c''=-b'-b''$, $(c_{2n+1})\to c'=-b'-b''$. Azaz $(c_n)\to c=c'=c''=-b'-b''$.

Nem lehet viszont $c=0$, mert ekkor $b'=-b''$ lenne, tehát $b', b''\geqq 0$ alapján $b'=b''=0$ állna fenn. Ez viszont azt jelentené, hogy vagy egy 1-nél nagyobb, vagy egy 1-gyel egyenlő, vagy egy b_i $(b_i>0)$ számnál nagyobb tagokból álló sorozat tartana 0-hoz, de ez kizárt.

Ezért $c\neq 0$. A gyökök és együtthatók összefüggéseit ismét alkalmazva:

$$(19)\qquad b_{2n}\cdot c_{2n}=c_{2n-1} \quad \text{és} \quad (20)\quad b_{2n+1}\cdot c_{2n+1}=c_{2n},$$

melyekből határátmenettel $b''\cdot c=c$ és $b'\cdot c=c$, azaz $c\neq 0$ miatt $b''=b'=1$.

(17)-ből határátmenettel $b''+c=-b'$, $1+c=-1$, $c=-2$.

Vagyis konvergens a (b_n) sorozat, és $(b_n)\to 1$, valamint konvergens a (c_n) sorozat is, és $(c_n)\to -2$.

Ezzel tételünk minden állítását igazoltuk.

* * *

Végezetül visszatérek a PTK—1050 általános iskolai alkalmazására. A *matematikaszakkörök*ről van szó. A mai hetedikes, nyolcadikos tanulók ugyanis már minden valószínűség szerint későbbi munkájuk, életük során nap mint nap fognak különféle számítógépekkel, programokkal találkozni (hadd utaljak például a már napjainkban is létező oktatóprogramokra, sakkozó számítógépekre, üzemi számítógépekre stb.).

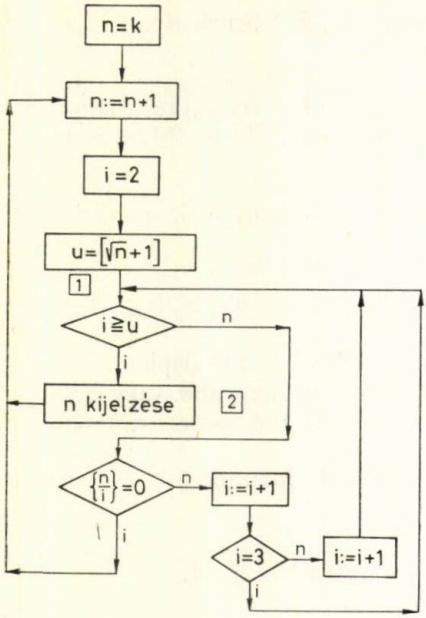
Kívánatos (talán: elengedhetetlen?) lenne, hogy — legalábbis a kiemelkedő képességűek — megismerkedjenek a programozás alapelveivel, egy-két egyszerű programnyelvvel, illetve programozható számológéppel.

Éppen ezért iskolánkban a hetedik osztályosok számára meghirdetett matematikaszakkörön programozással *is* foglalkozunk (szakköri munkánk kb. 2/3-a hagyományos jellegű). Ehhez a két PTK—1050-est használjuk fel.

Egyelőre még inkább csak bemutató jelleggel egy *prímszámokat előállító programmal* foglalkozunk, mely elsődlegesen a tanulók előzetes ismereteire épít, de néhány új fogalom kialakítását is igényelte (egészrész, törtrész, illetve a tanórákon csak később következő négyzetgyök fogalma).

A program a következő:

blokkdiagram: *rekeszek:* *utasítások:*



n ∈ ① LRN
RCL 1+1=STO 1

i ∈ ② 2 STO 2

u ∈ ③ RCL 1 $\sqrt{x}$+1=2nd Int STO 3
2nd Lb11
RCL 3 STO 7 RCL 2 2nd $x \geqq t$
GTO 2
0 STO 7 RCL 1 ÷ RCL 2=INV 2nd Int
2nd $x=t$
RST
3 STO 7 RCL 2+1=STO 2
2nd $x=t$ GTO 1 RCL 2+1=STO 2 GTO 1
2nd Lb1 2
RCL 1 2nd Pause RST
LRN RST

kezdés: k STO 1 (pl.: 1 STO 1) R/S

Ez a program is 48 lépésből áll.

A program felépítésének az az alapelve, hogy megvizsgálja azt, n osztható-e 2-vel, 3-mal, majd ettől kezdve 2-vel növeli a vélt osztókat, azaz már csak a páratlan számokkal való oszthatóságot vizsgálja, egészen addig, amíg a lehetséges osztó el nem éri a $[\sqrt{n}+1]$ ($\sqrt{n}+1$ egészrésze) értékét. Ha közben talál osztót, azonnal áttér $(n+1)$ vizsgálatára. Ha nem, akkor kijelzi az n prímszám értékét, majd áttér $(n+1)$ vizsgálatára.

Ennek a programnak természetesen nincs közvetlen elméleti jelentősége. Mégis pl. érzékeltethetjük vele, hogy a prímszámok száma végtelen: minden határon túl találhatunk prímet.

Lefuttatva a programot $k=100$; 1000; 10000; 100000; 1000000 kezdőértékre sorra az $n=101$; *1009; 10007; 100003; 1000003* első prímszámokat kapjuk. (Az utóbbi kettőt már csak 6 min 0,6 s, illetve 19 min 59 s alatt találta meg a gép.)

Érdemes tehát foglalkozni a számítógépekkel. Nemcsak a gyakorlati munkát (különféle számítások elvégzését) könnyítik meg, hanem — olykor-olykor — elméleti megállapításokat is sugallhatnak. Segítségünkre lehetnek a tanításban, a jó képességű tanulók tehetségének kibontakoztatásában.

Gazdagítják a matematikát, s ezzel (a legtágabb értelemben) gazdagítanak bennünket is.

FELADATOK

Rovatvezető: Pogáts Ferenc

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni:

Budapest, Petőfi Sándor utca 10. II. 10., 1052. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljük! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak különböző megoldásait is) külön lapra írjuk tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket különkülön hajtsuk össze, és külső felére írjuk rá a feladat számát és a megoldó nevét! (Csatoljunk a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is!) A megoldásokat a kitűzést követő negyedik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: A lap kézbesítésétől számított egy hónap.

1089. Egy szabályos 13-szög csúcsait két színnel kiszíneztük. Mutassuk meg, hogy van három egyszínű csúcs, amelyek egy egyenlő szárú háromszöget alkotnak!

1090. Az $a_n=\frac{1}{n}$ $(n\geqq 1)$ sorozat elemei közül válasszunk ki hetet úgy, hogy azok egy számtani sorozat egymásutáni elemei legyenek és összegük $\frac{1}{180}$ legyen!

Nagy Ferenc, Hajdúnánás

1091. Vannak-e olyan, a nullától különböző x és y egészek, amelyekre az alábbi kifejezések,

$$(x+3y)x^2 \quad \text{és} \quad (y+3x)y^2$$

egyidőben köbszámok?

Tuzson Zoltán, Marosvásárhely

1092. Oldjuk meg a valós számok halmazán a

$$\sum_{k=0}^{n}\left[2^k\cdot x+\frac{1}{2}\right]=2^n$$

egyenletet, $[a]$ az a szám egészrészét jelöli, n pedig természetes egész!

Varga István, Nagyszalonta

1093. Mutassuk meg, hogy a

$$\operatorname{tg}\frac{1}{x}=\frac{x}{\ln x}$$

egyenletnek bármely $\left(\frac{2}{(2k+1)\pi}, \frac{2}{(2k-1)\pi}\right)$ (k pozitív egész) intervallumon van megoldása!

Bíró Béla, Barót

1094. Legyenek $m\leqq n$ pozitív egészek, $x>0$ valós szám. Bizonyítsuk be, hogy

$$2mn(n^x-m^x)\leqq(n-m)(m^{x+1}+n^{x+1})x.$$

Louis Funar Lucian, Craiova

Feladatmegoldások (1065—1070.)

1065. Legyen

$$a = 4^p + 5^p + 7^p + 1 \quad \text{és} \quad b = 4^p + 5^p + 7^p - 1,$$

ahol p prímszám. Bizonyítsuk be, hogy a és b nem lehetnek ikerprímek!

Horváth Tibor, Dunakeszi

Megoldás: Ha $p=2$, akkor $a=91$, $b=89$, ezek nem ikerprímek, hiszen $91=7\cdot 13$. Három egymást követő egész szám egyike mindig osztható 3-mal. Ha a és b ikerprímek, akkor az $\frac{a+b}{2}$-nek 3-mal oszthatónak kell lennie $(b>3)$.

A binomiális tételt az $5^p=(2\cdot 3-1)^p$ és $7^p=(2\cdot 3+1)^p$ kifejezésekre alkalmazva:

$$\frac{a+b}{2} = 4^p + 5^p + 7^p = (3+1)^p + (2\cdot 3-1)^p + (2\cdot 3+1)^p = 3A + 1^p + (-1)^p + 1^p,$$

ahol A egész.

Ha $p>2$, akkor $\frac{a+b}{2}$ 3-mal osztva 1 maradékot ad, így vagy a, vagy b 3-mal osztható, tehát nem lehetnek ikerprímek.

Csorba Ferenc, Győr

A megoldók száma: 30.

1066. Jelölje az a, b, c oldalú háromszög területét $t(a, b, c)$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sqrt{t(a,b,c)} + \sqrt{t(p,r,s)} \leqq \sqrt{t(a+p, b+r, c+s)}.$$

Megoldás: Vezessük be a következő jelöléseket:

$$s_1 = \frac{1}{2}(a+b+c), \quad s_2 = \frac{1}{2}(p+r+s),$$

$$s_3 = s_1 + s_2 = \frac{1}{2}(a+b+c+p+r+s),$$

$$s_1 - a = x, \quad s_1 - b = y, \quad s_1 - c = z,$$

$$s_2 - p = t, \quad s_2 - r = u, \quad s_2 - s = v.$$

E jelölésekkel, a *Heron*-formulából

$$\sqrt{t(a,b,c)} = \sqrt[4]{s_1 \cdot x \cdot y \cdot z},$$

$$\sqrt{t(p,r,s)} = \sqrt[4]{s_2 \cdot t \cdot u \cdot v},$$

és

$$\sqrt{t(a+p, b+r, c+s)} = \sqrt[4]{(s_1+s_2)(x+u)(y+v)(z+t)}$$

adódik. Ezért a

$$(*) \qquad \sqrt[4]{s_1 \cdot x \cdot y \cdot z} + \sqrt[4]{s_2 \cdot t \cdot u \cdot v} \leqq \sqrt[4]{(s_1+s_2)(x+u)(y+v)(z+t)}$$

egyenlőtlenséget kell igazolni.

A *Skljarszkij—Csencov—Jaglom:* Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből, 1. Aritmetika és algebra című könyv, Tankönyvkiadó, 306. feladata szerint, ha $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$; $\ldots$; $k_1, k_2, \ldots, k_n$ pozitív számok, akkor

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \ldots a_n} + \sqrt[n]{b_1 \cdot b_2 \ldots b_n} + \ldots + \sqrt[n]{k_1 \cdot k_2 \ldots k_n} \leqq$$

$$\leqq \sqrt[n]{(a_1 + b_1 + \ldots + k_1)(a_2 + b_2 + \ldots + k_2)\ldots(a_n + b_n + \ldots + k_n)},$$

és egyenlőség is csak akkor, ha

$$a_1 : b_1 : \ldots : k_1 = a_2 : b_2 : \ldots : k_2 = \ldots = a_n : b_n : \ldots : k_n .$$

A (*) alatti egyenlőtlenség a feladatnak az $n=4$-re vonatkozó speciális esete.

Ezzel az állítást igazoltuk, sőt azt is beláttuk, hogy egyenlőség csakis akkor állhat, ha a két háromszög hasonló.

Kondor Judit, Budapest

Megjegyzés: A megoldásban felhasznált egyenlőtlenség utal a feladat általánosíthatóságára is: Ha a_i, b_i, c_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ jelöli egy háromszög oldalait, akkor

$$\sum_{i=1}^{u} \sqrt{t(a_i, b_i, c_i)} \leqq \sqrt{t\left(\sum_{i=1}^{n} a_i, \sum_{i=1}^{n} b_i, \sum_{i=1}^{n} c_i\right)},$$

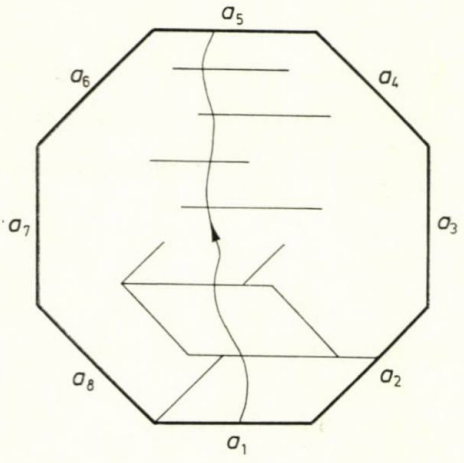
és az egyenlőség is csak akkor áll, ha a háromszögek hasonlók.

Bencze Mihály, Brassó

A megoldók száma: 12.

1067. Egy szabályos nyolcszöget véges sok paralelogrammára darabolunk. Mutassuk meg, hogy e darabok között van legalább két téglalap!

Megoldás: A nyolcszög a_1 oldalához (1. ábra) csatlakozik egy oldalával legalább egy paralelogramma; ehhez az a_1-en levő oldalával szemközti oldalához egy újabb paralelogramma, és így tovább. E paralelogrammákkal véges számú lépésben elérjük az a_5 oldalt, azaz olyan paralelogrammához jutunk, amelynek az a_1-gyel párhuzamos oldala az a_5 oldalhoz tartozik.



1. ábra

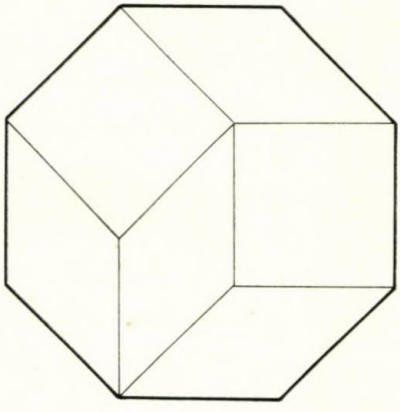
Húzzunk egy olyan folytonos vonalat, amely az a_1 és a_5 oldalak egy-egy belső pontját köti össze, és az említett paralelogrammák egyesítéséhez tartozik.

Ugyanilyen folytonos vonallal köthető össze az a_3 és a_7 oldal is. E két vonalnak legalább egy közös pontja van. A közös pont egy olyan paralelogrammának pontja, amelynek oldalai a_1-gyel és a_3-mal párhuzamosak, tehát téglalap.

Ismételjük meg eljárásunkat az a_2, a_6 és az a_4, a_8 oldalpárokkal. A kapott két folytonos vonal közös pontja egy olyan téglalaphoz tartozik, amelynek oldalai az a_2, illetve az a_4 oldalakkal párhuzamosak.

A most nyert téglalap különbözik az előbbitől, hiszen ennek oldalai az a_1, illetve a_3 oldalakkal párhuzamosak.

Kamarás Lajos, Pécs



2. ábra

Megjegyzés: A *Skljarszkij—Csencov—Jaglom:* Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből 3., Geometria II. (sztereometria) c. könyv 113. feladatának *a.* része szerint minden centrálszimmetrikus konvex sokszög paralelogrammákra darabolható, a *b.* rész szerint e részek száma a $2n$ oldalú sokszögben legalább $\binom{n}{2}$. Ez utóbbi rész bizonyításából az is kiderül, hogy ha egy centrálszimmetrikus konvex sokszöget véges sok paralelogrammára darabolunk, akkor a paralelogrammák között van olyan, amelynek oldalai a sokszög két — tetszőlegesen választott — nem párhuzamos oldalával párhuzamosak (2. ábra). Ebből pedig az is következik, hogy a $4k$ ol-

dalú szabályos sokszöget paralelogrammákra darabolva, ezek között legalább k darab téglalap van.

Cseh László, Kolozsvár és Csorba Ferenc, Győr

A megoldók száma: 10.

1068. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a pozitív egészek halmazán:

$$e_1x^2+e_2y^2+e_3z^2 = t_1^3,$$

$$e_3x^2+e_1y^2+e_2z^2 = 1,$$

$$e_2x^2+e_3y^2+e_1z^2 = t_2^3,$$

ahol $|e_1|=|e_2|=|e_3|=1$, t_1 és t_2 pedig $3n+1$ alakú pozitív egészek.

Bege Antal, Csíkszereda

Megoldás: Először az e_1, e_2, e_3 konstansok különböző lehetséges értékeit vizsgáljuk.
Ha $e_1=e_2=e_3=1$, akkor a második egyenlet

$$x^2+y^2+z^2 = 1,$$

aminek nincs pozitív egész megoldása, hiszen a bal oldal legalább 3.
Adjuk össze a három egyenletet:

$$(e_1+e_2+e_3)(x^2+y^2+z^2) = t_1^3+t_2^3+1.$$

Ebből látható, hogy ha $e_1+e_2+e_3<0$, akkor az egyenletrendszernek nincs pozitív egész megoldása.
Ezek szerint megoldást csak abban az esetben remélhetünk, amelyben az e_1, e_2, e_3 konstansok között pontosan egy van, ami -1.
Mivel x, y, z szerepe az egyenletrendszer egyenleteiben azonos, ezért elegendő a következő választást vizsgálni:

$$-x^2+y^2+z^2 = (3m+1)^3,$$

$$x^2-y^2+z^2 = 1,$$

$$x^2+y^2-z^2 = (3n+1)^3.$$

Könnyen látható, hogy $m=n=0$ esetén az

$$|x| = |y| = |z| = 1$$

az egyenletrendszernek megoldása.
Megmutatjuk: nincs több megoldás.
Ha ugyanis volna fentitől különböző megoldás, akkor a második és harmadik egyenlet összegéből adódó

$$2x^2 = (3n+1)^3+1 \quad (n > 0)$$

egyenletnek is lenne megoldása.
A bal oldal páros. A jobb oldal pontosan akkor páros, ha n páros, $n=2k$ ($k>0$, egész). Ezzel egyenletünk bal oldala, szorzattá alakítás után:

$$2x^2 = (6k+1)^3+1 = (6k+2)[(6k+1)^2-(6k+1)+1] = 2(3k+1)(36k^2+6k+1),$$

amiből

$$x^2 = (3k+1)(36k^2+6k+1)$$

adódik.
Mivel $36k^2+6k+1=(3k+1)(12k-2)+3$, ezért a jobb oldal két tényezőjének legnagyobb közös osztója

$$(3k+1, 36k^2+6k+1) = (3k+1, 3) = 1,$$

vagyis a tényezők relatív prímek, de ekkor mindkét tényező négyzetszám kell legyen.
A

$$36k^2 = (6k)^2 < 36k^2+6k+1 < (6k+1)^2 = 36k^2+12k+1$$

miatt azonban a $36k^2+6k+1$ sohasem lehet négyzetszám, hiszen két szomszédos négyzetszám között áll.

Ezzel beláttuk, hogy az egyenletrendszernek összesen nyolc megoldása van:

x	1	−1	1	1	−1	−1	1	−1
y	1	1	−1	1	−1	1	−1	−1
z	1	1	1	−1	1	−1	−1	−1

Kamarás Lajos, Pécs

A megoldók száma: 5.

1069. Határozzuk meg azokat a folytonos

$$f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$$

függvényeket, amelyek tetszőleges $x>0$ esetén kielégítik az

$$f(x^2)+f(x)=x^4-x+15\cdot\ln x$$

összefüggést!

Cseh László és Merényi Imre, Kolozsvár

Megoldás: Vegyük észre, hogy

$$g:(0,\infty)\to\mathbf{R},$$

$$g(x)=x^2-x+5\cdot\ln x$$

esetén g folytonos és

$$g(x^2)+g(x)=x^4-x^2+5\cdot\ln x^2+x^2-x+5\cdot\ln x=x^4-x+15\cdot\ln x.$$

Van-e g-től különböző, a feltételeket teljesítő függvény?

Legyen

$$h:(0,\infty)\to\mathbf{R}\quad\text{és}\quad h=f-g.$$

A h folytonos, mert ilyenek különbsége. Az $f=g+h$ miatt

$$g(x^2)+h(x^2)+g(x)+h(x)=x^4-x+15\cdot\ln x,$$

azaz

$$h(x^2)+h(x)=0\quad\text{minden pozitív } x\text{-re.}$$

Ebből

$$h(x^4)+h(x^2)=0,$$

s a fenti kettő különbségéből

$$h(x^4)=h(x)\quad\text{minden pozitív } x\text{-re, azaz}$$

minden pozitív x-re és egész k-ra. $h(x)=h(x^{\frac{1}{4k}})$,

Mivel

$$h(1^2)+h(1)=2\cdot h(1)=0,$$

azaz

$$h(1)=0,$$

ezért h folytonossága miatt

$$h(x)=\lim_{k\to\infty}h(x)=\lim_{k\to\infty}h(x^{\frac{1}{4k}})=h\left(\lim_{k\to\infty}x^{\frac{1}{4k}}\right)=h(1)=0$$

minden $x>0$-ra, és így $f-g=h$, azaz $f=g$.

Ezzel beláttuk, hogy egyetlen folytonos függvény van, amely a feltételeket kielégíti:

$$f:(0,\infty)\to\mathbf{R},\quad f(x)=x^2-x+5\cdot\ln x.$$

Burus Árpád Csaba, Székelyudvarhely

Megjegyzés: A feladatnak több általánosítása adható.

1. Az

$$f:(0,\infty)\to\mathbf{R},\quad f(x^2)+f(x)=x^4-x+a\cdot\ln x$$

feltételeket egyedül az

$$f(x)=x^2-x+\frac{a}{3}\ln x$$

elégíti ki.

2. Az

$$f:(0,\infty)\to\mathbf{R},\quad \sum_{k=1}^{n} f(x^{2^k}) = x^{2^{n+1}} - x + a\cdot\ln x$$

feltételeknek csak az

$$f(x) = x^2 - x + \frac{a}{2^{n+1}-1}\cdot\ln x$$

tesz eleget.

Bencze Mihály, Brassó

A megoldók száma: 15.

Az **1970.** feladat megoldását helyszűke miatt 2. számban közöljük.

A megoldók névsora (1065—1070.)

Ambrus Gabriella, Budapest (1065., 1066.); Bagi Gábor, Barcs (1065.); Bencze Mihály, Brassó (1065., 1066., 1068—1070.); Bíró László, Székelyudvarhely (1065—1070.); Burus Árpád Csaba, Székelyudvarhely (1065., 1069., 1070.); Cseh László, Kolozsvár (1065—1069.); Csorba Ferenc, Győr (1065., 1067., 1069.); Dezső Gábor, Kolozsvár (1065., 1066., 1069., 1070.); Fehér József, Csongrád (1069., 1070.); Giczi Margit, Sümeg (1065).; Hajna János, Pécs (1065. 2 mód, 1069., 1070.); Hornyák Pál, Érsekújvár (1065—1067.); Kamarás Lajos, Pécs (1065—1070.); Karsai Bálint, Nagyigmánd (1065.); Kondor Judit, Budapest (1065., 1066.); Kormos Gizella, Sümeg (1065.); Dr. Major Pál, Budapest (1065., 1067.); Major Piroska, Budapest (1065.); Merényi Imre, Kolozsvár (1065—1067., 1069., 1070.); Mészáros Mihály, Hejőkeresztúr (1065., 1069., 1070.); Nagy Ferenc, Hajdúnánás (1065.); Nyírő László, Mezőkövesd (1065.); Peták Tamás, Szolnok (1065.); Spissich László, Pápa (1065—1067., 1069., 1070.); Szánthó Gyula, Gyula (1065., 1067.); Tuzson Zoltán, Marosvásárhely (1065., 1066., 1069., 1070.); Varga István, Nagyszalonta (1065., 1066., 1068—1070.); Zábrádiné, Schmierer Emília (1065.); Zsidó-Nagy György, Kolozsvár (1065., 1067., 1069., 1070.).

Dr. Ábrahám—Bedő—Czétényi—ifj. Frigyesi—Juhász—dr. Korányi:

Matematika az előkészítő tanfolyamok számára

A most befejeződött matematika-tantervi reform az előző évek anyagához képest tartalmi és formai szempontból lényeges eltérést jelent. A főiskolák és egyetemek nappali tagozatára, de régebben érettségizett, valamint az esti és levelező tagozatára jelentkező hallgatók ezt a tartalmi és formai változást e könyv segítségével adaptálni tudják.

A könyv tömören tartalmazza az új középiskolás tananyagot. A felvételizők részére nagy segítséget jelent a definíciók és tételek összegyűjtése, valamint a minden témakörhöz kidolgozott feladatok. Ezért az érettségire való felkészülést is segítheti.

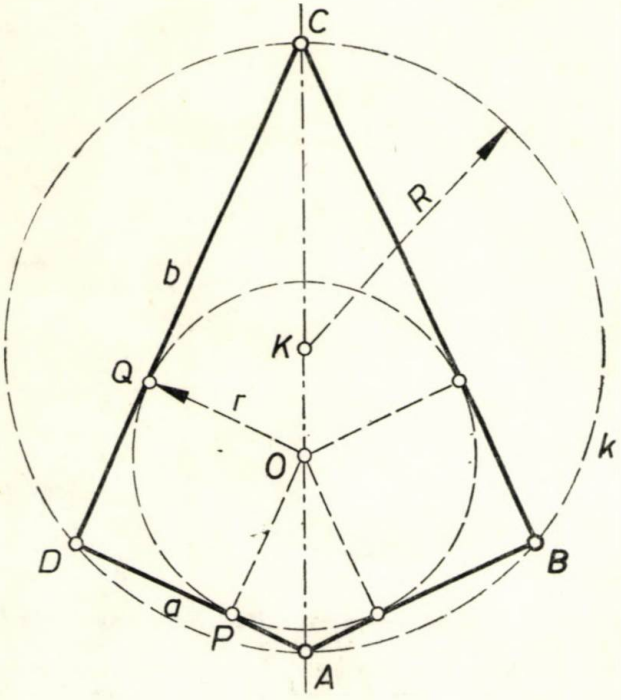
Tankönyvkiadó, Budapest, 1985. (R. szám 81 303)

Ára: 7,— Ft

A Matematika Tanítása

A Művelődési Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat módszertani folyóirata

SZEGEDY KÖNYVTÁR SZOLNOK



1985. május * XXXII. évfolyam 2 szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

A MŰVELŐDÉSI MINISZTÉRIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:

HÓDI ENDRE

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG:

ÁCS PÁL, BEREZNAI GYULA, BIGE ISTVÁNNÉ, ELŐD ISTVÁNNÉ, KOVÁCS ZOLTÁN, NÉMETHY KATALIN, NYILAS DEZSŐ, PÁLMAY LÓRÁNT, DR. PELLER JÓZSEF, POGÁTS FERENC, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ, SZTANÓ TAMÁSNÉ

Szerkesztőség: 1071 Budapest, Gorkij fasor 17—21.
Telefon: 211-200

85-0000 — Szegedi Nyomda — F. v.: Dobó József igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS

A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

Előfizethető a hírlapkézbesítő postahivatalokban és a Posta Központi Hírlap Irodában (postacím: Budapest V., József nádor tér 1. — 1900) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI 215-96 162 pénzforgalmi jelzőszámlára. Előfizetési díj egész évre 42,— Ft. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példányonkénti eladási ár: 7,— Ft.

ISSN 0461—3902

TARTALOM

Hódi Endre: 1945. április 4. 33
Kerékgyártó László: A függvénytranszformációk tanításáról 36
Dr. Kiss Sándor: A skatulya-elv tanításának megalapozása 41
Dr. Kántor Sándorné—Dr. Megyesi László: A tudományegyetemek 1984. évi matematika felvételi írásbeli vizsgáinak tapasztalatairól 45
FELADATOK 57

СОДЕРЖАНИЕ

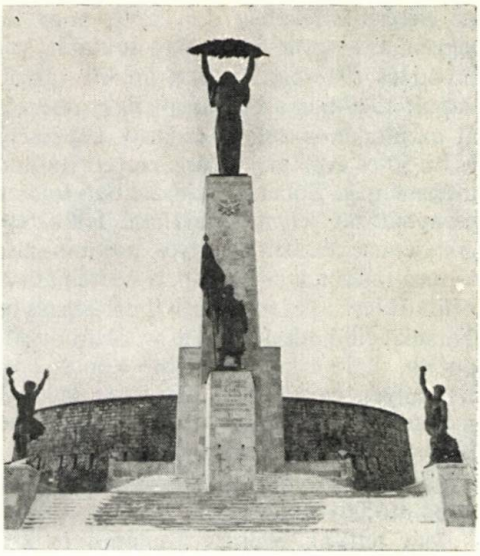
Ходи Эндре: 4 апреля 1945 г. 33
Керекдярто Ласло: О преподавании преобразования функций 36
д-р Киши Шандор: Обоснование преподавания «принципа шкатулок» 41
д-р Кантор Шандорне—д-р Медеши Ласло: Опыт письменных вступительных экзаменов по математике 1984 г. в университетах 45
ЗАДАЧИ 57

INHALT

Hódi, Endre: Der 4-te April 1945 33
Kerékgyártó, László: Über den Unterricht der Transformationen von Funktionen . 36
Dr. Kiss, Sándor: Die Grundlegung des Unterrichts des Dirichletschen Schachtel- oder Taubennest-Prinzips 41
Frau Dr. Tünde Kántor (geb.: *Varga*)—*Dr. Megyesi, László:* Über die Erfahrungen bei den schriftlichen Eintrittsprüfungen aus Mathematik an den Universitäten im Jahre 1984 45
AUFGABEN 57

Kérjük a kartársakat, hogy közlésre szánt cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betűhely. Szíveskedjenek közölni a következő adatokat is:
a) személyi számukat, *b)* asszonyok leánykori nevüket, *c)* lakáscímüket — irányítószámmal, *d)* foglalkozásukat (beosztásukat), *e)* munkahelyük pontos megnevezését, *f)* munkahelyük címét — irányítószámmal.

1945. április 4.



Ezen a napon fejeződött be hazánk területének teljes felszabadítása. A dátum sokáig emlékezetes marad Magyarország történelmében. Mivel idén kerek évfordulójához érkeztünk, szerte az országban, de határainkon túl is nagyon sok méltatás hangzott, hangzik el, illetve jelent, jelenik meg írásban e nap történelmi jelentőségéről, egész népünk életét döntően megváltoztató hatásáról.

Nyilvánvaló, hogy a negyven évvel ezelőtti események felelevenítésére, a nyomukban meginduló politikai élet jelentős fázisainak újbóli felsorolására, az elmúlt négy évtized során bekövetkezett mélyreható társadalmi változások, a velük szorosan összefüggő, gazdasági, szociális és kulturális életünket érintő, forradalmi méretű átalakulások elemző ismertetésére vannak hivatottabb személyek, mint a jelen sorok írója, és alkalmasabb fórumok, mint egy módszertani lap hasábjai.

Mégsem szeretnénk egészen kimaradni az ünnepi megemlékezők sorából, mert úgy érezzük, hogy nekünk is van megemlékezni és ünnepelni valónk. Ezért vetek papírra néhány gondolatot ezzel kapcsolatban, talán kissé szaggatottan és semmi esetre sem a teljességre törekvés igényével.

Elsőként fájdalommal emlékezünk azokra a neves és kevésbé neves matematikus és matematikatanár társainkra, akiknek életét áldozatul követelte az emberiség történelmének legsúlyosabb világégése. Köztük nem kevés volt azoknak a száma, akik politikai meggyőződésük vagy pusztán származásuk miatt a koncentrációs táborok poklában lelték halálukat. A túlélők kötelessége, hogy megőrizzük emléküket.

De 1945. április 4. nemcsak egy tragikus korszak befejezését, a háború borzalmaitól való megszabadulást jelentette a magyarság számára, hanem az ország újjáépítésének, illetőleg jobban mondva: egy új ország építésének kezdetét is. Természetes, hogy az első esztendőkben lassan mutatkoztak meg ennek eredményei; hiszen borzalmasak voltak országunk vér- és anyagi veszteségei; elcsigázottak azok, akik életben maradtak; sokan közülük kételkedtek abban, hogy belátható időn belül újra élet sarjadhat a romokon; igen hiányosak voltak az újjáépítés feltételei minden szempontból; azonkívül a kibontakozást hátráltatták az újjáépítésre vonatkozó különböző elgondolások is.

Mégis lehetetlen elfogódottság nélkül emlékeznem arra a szoros összefogásra, amely akkoriban jellemezte a matematikusokat: mindegyikük ugyanannak a célnak

az elérése érdekében dolgozott, hogy ti. minél színvonalasabb és eredményesebb legyen a magyar matematikaoktatás valamennyi szinten, a már 1945-ben életre hívott és 1948-ban teljesen állami irányítás alá került általános iskolától kezdve a kapuit 1949-ben a munkások és parasztok gyermekei előtt szélesre tárt középiskolán át az általános iskolai tanárok képzésére 1948-ban létesített pedagógiai főiskoláig és az 50-es évek elején átszervezett tudományegyetemig, valamint többi felsőoktatási intézményig. Ebben az időszakban fogant meg a közép- és felsőfokú oktatási intézményhálózat jelentős mértékű fejlesztésének, a részben a Magyar Tudományos Akadémia, részben az egyes szakminisztériumok irányítása alá tartozó tudományos kutató intézetek — köztük a Matematikai Kutató Intézet — kiépítésének, a szovjet példán alapuló új rendszerű tudósképzés bevezetésének és a Bolyai János Matematikai Társulat működési területe valóban országos méretűvé történő kiterjesztésének gondolata, majd e korszakalkotó koncepciók fokozatos és következetes megvalósítása. És milyen egységesek, mennyire lelkesek voltak azokban az években a magyar matematikusok mind azoknak a feladatoknak megoldásában, amelyek az előbb ismertetett tervek valóra váltásából rájuk hárultak, mind egyéni és kollektív tudományos tevékenységük kiteljesítésében! Méltó példaként szolgálhatnak ma élő és dolgozó utódaiknak.

Már tettünk említést általános és középiskolai oktatásunknak az elmúlt négy évtizedben bekövetkezett fejlődése néhány fontosabb állomásáról. Célszerűnek látszik röviden annak megvizsgálása is, hol állunk jelenleg e tekintetben a matematika tanításának területén. Az 1978-ban felmenő rendszerrel bevezetett általános iskolai új matematika-tanterv több, mint tíz évi kísérletezés tapasztalataiból kristályosodott ki, és színvonalára, korszerűségére nézve is nemzetközi összehasonlításban is megállja helyét. Gyakorlati megvalósításában ennek — valamint az érdekelt nevelők meglehetősen széles körű felkészítésének — ellenére vannak bizonyos gondok. Az idevágó okok részletes elemzését nyilván nem végezhetjük el e helyütt, annyit azonban meg kell mondanunk, hogy az okok egy részét még nem lehetett látni az új tanterv elkészítésekor, és azok sokkal általánosabb jellegűek, mintsem hogy az új matematika-tantervet kellene hibáztatni miattuk, de főképpen azt az álláspontot kell a leghatározottabban visszautasítanunk, amely az általános iskolai oktatásban megnyilvánuló minden negatív jelenséget, pl. a tanulók fegyelmének és munkaerkölcsének lazulását, kizárólagosan az új matematika-tanterv hatásának tulajdonítja. Ezen a téren a következő esztendők feladata lesz az általános iskolai matematikatanterv és a hozzá csatlakozó dokumentumok olyan korrekciójának kidolgozása, majd fokozatos végrehajtása — főként a felső tagozaton —, amely az eddiginél jobban veszi tekintetbe általános iskolai matematikatanításunk tényleges feltételeit, de ugyanakkor nem tér el a jelenlegi tanterv módszertani alapelveitől.

A gimnázium a felszabadulás előtti elitiskolából tömegiskolává vált. Elegendő itt arra emlékeztetni, hogy 1945 előtt kb. annyian jártak gimnáziumba, mint amennyien ma a felsőoktatási intézmények nappali tagozatára, ugyanakkor jelenleg a 14—18 éves korú fiataloknak mintegy 20%-a vagy annál valamivel több a gimnáziumi tanuló. A létszámnövekedés miatt szükségképpen megváltozott a gimnáziumi nevelés-oktatás célja. Változatlanul megmaradt ugyan az a cél, hogy képessé tegye tanulóit a felsőfokú továbbtanulásra, de azokat a tanulókat, akik nem vállalkoznak ilyen továbbtanulásra, fel kell készítenie a gyakorlati életbe való beilleszkedésre, a gimnázium elvégzése utáni munkavállalásra.

Kétségtelen, hogy a gimnáziumi tanulók létszámának említett mértékű megnövekedése bizonyos színvonalcsökkenést is vont maga után — már ami az átlagot illeti —, de figyelembe kell vennünk, hogy a különféle speciális tantervű osztályok létesítése,

továbbá az 1979-ben felmenő rendszerrel bevezetett új tanterv keretében a széles körű fakultatív oktatás meghonosítása miatt ma a gimnáziumi tanulók tudása általában sokkal nagyobb skálán szóródik mind a klasszikus elméleti, mind pedig a gyakorlati tantárgyak területén, mint a felszabadulás előtt, amikor egyébként gimnáziumi gyakorlati képzésről nem is beszélhettünk. Hogy ez csakugyan így van, arra vonatkozólag legyen szabad tanulóinknak a nemzetközi — matematikai, fizikai és kémiai — diákolimpiákon ismételten elért kiemelkedő teljesítményeire utalni.

Vannak olyan vélemények, amelyek a fakultatív oktatás továbbfejlesztését tartják célszerűnek a gimnáziumban, mégpedig úgy, hogy már korábban is megkezdhessék egyes tárgyak fakultatív tanulását — ne csak III. osztálytól kezdve — azok a tanulók, akikben már előbb kialakul a vonzódás valamilyen tudományághoz. Ennek a törekvésnek azért nehéz az érvényesítése, mert az ötnapos tanítási hétre való áttéréssel — mint minden iskolatípusban — a gimnáziumban is megnövekedett a tanulók (túl)terhelése és a tanároké is. A véleménnyel különben elvileg egyet lehet érteni.

Itt említjük meg azt is, hogy a gimnáziumi fakultatív matematikaoktatás helyzetét minden bizonnyal erősítené egy olyan rendelkezés, amely az egyetemi és főiskolai felvételi vizsgák matematikaanyagát a gimnáziumi A változatú fakultatív tanterv és a szakközépiskolai A változatú tanterv törzsanyagának közös részében jelölné meg. Jelenleg ui. ez az anyag a gimnáziumi matematika alaptanterv és a szakközépiskolai A változatú tanterv törzsanyagának közös része.

A szakközépiskolai oktatás — ezenbelül a matematikaoktatás — továbbfejlesztésének következő lépése a munka megindulása lesz a kijelölt technikusképző szakközépiskolákban — egyelőre kísérleti jelleggel. Bízunk benne, hogy az új iskolatípus beváltja majd a hozzá fűzött reményeket, és megfelelő általános műveltséggel rendelkező, ugyanakkor szakmailag is jól képzett fiatal szakembereket fog adni a magyar népgazdaságnak, amely már nagyon várja az ilyen szakembereket.

A szakmunkástanulók, a hajdani tanoncok oktatásában is igen nagy változások mentek végbe 1945 óta. Ezen a területen 1977-ben vezettek be legutóbb új tanterveket és azokhoz kapcsolódó új dokumentumokat ugyancsak felmenő rendszerrel. Ez a matematikára is vonatkozott. Az új matematika-tantervek, tankönyvek és munkalapok általában beváltak a gyakorlatban, a szakmunkásképző iskolai matematikaoktatás ügye viszonylagos nyugvópontra jutott, még az ötnapos tanítási hétre való áttérés sem okozott különösebb gondot. Sajnos azonban, 1983 őszén átcsoportosították a szakmunkásképző iskolák matematikaóráit: az első évfolyam óráinak kb. egyharmadát áthelyezték a II. évfolyamba. Bár így látszólag nem károsodott a tantárgyunk, de a tényleges helyzet — érthető módon — nem ezt mutatja. Az I. osztályban égető szükség van a matematika korábbi óraszámára egyrészt a felzárkóztatás nehéz feladatának megoldásához, másrészt olyan matematikai ismeretek megtanításához, amelyeket egyes szaktárgyak tanárai joggal igényelnek már a szakmunkásképzés korai időszakában. Világos, hogy a jelen körülmények között a szakmunkásképző iskolák matematikatanárai nem tudnak idejében és teljes mértékben eleget tenni e kettős követelménynek. A II. osztályban pedig ez már késő, hiába több ott az óraszám. Ezen a helyzeten minél előbb változtatni kell!

Időben előbb a középiskolákban és a középfokú iskolákban, később az általános iskolában is megkezdődik a közeljövőben a számítástechnikai alapismeretek órarendi keretben történő oktatása többek között azzal a céllal, hogy a tanulók bizonyos fokig önállóan is fel tudják használni az iskolaszámítógépeket az egyes tárgyak anyagának tanulása során. A számítástechnikai alapismeretek jellegéből következik, hogy ezeknek jelentékeny részét a matematika keretében kell majd elsajátítaniuk a különféle iskolatípusok tanulóinak. Ez az újabb — a jövő szempontjából rendkívül

fontos — feladat is megoldható, de csak akkor, ha kellő óraszámot bocsátanak rendelkezésre hozzá.

Az előbbiekben — emlékezés és ünneplés ürügyén — végül is általános és középiskolai matematikaoktatásunk néhány időszerű problémájáig jutottunk el. Az az út azonban, amelyet 1945. április 4. óta tettünk meg, míg ide nem érkeztünk, a hazai matematikai tudomány és a hazai matematikatanítás fejlődésének területén is hosszú volt, nemegyszer göröngyös és buktatókkal is nehezített. Hogy egyáltalán elindulhattunk ezen az úton, hogy bejárhattuk azt, hogy ma azokról a problémákról beszélhetünk, amelyekről a jelen sorok is szóltak, többek között ehhez is 1945. április 4. adta meg az alapvető kezdeti lehetőséget.

Ezért hálával gondolunk mindazokra, akik biztosították nekünk ezt a lehetőséget.

Hódi Endre

KERÉKGYÁRTÓ LÁSZLÓ
tanár
4. sz. Általános Iskola, Érd

A függvénytranszformációk tanításáról

A függvények minden iskolatípusban tananyag, az új általános iskolai tanterv alapján nyolcadik osztályban is már viszonylag részletesen foglalkoznak a tanulók a függvénytranszformációkkal. Nem mindegy, hogy milyen módon közelítjük meg e témakört, megnehezítjük-e a továbbtanulók dolgát azzal, hogy eltérő tárgyalásmódot alkalmazunk. Ennek a lehetősége ma fokozottabban áll fenn, mint korábban, mert a számítógépek megjelenésével a matematikai oktatás eljárásai is bizonyos átalakításra szorulnak.

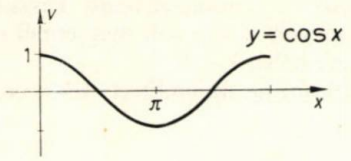
Konkrét esetünkben: a függvények tanításánál is új jelöléseket kell alkalmaznunk, és a transzformációk tanításának módszerét is célszerű megváltoztatnunk. Jelenleg a különféle iskolákban, de a tanárok ízlésétől is függően többféleképpen tanítjuk a függvénytranszformációkat. Legelterjedtebb az Obádovics Matematika című könyvében is ismertetett felépítés, ahol az $y=f(x)$ alap- vagy normálfüggvény ismeretében az

$y=af(bx+c)+d\equiv af\left[b\left(x+\frac{c}{b}\right)\right]+d$ függvény grafikonjához 5 lépésben jutunk el:

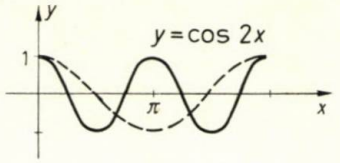
1. $y=f(x)$ alapfüggvény görbéjének felrajzolása,
2. x tengelymenti $\frac{1}{b}$-szeres nyújtás vagy zsugorítás,
3. x tengely irányában való $-\frac{c}{b}$ távolságú eltolás,
4. y tengelymenti a-szoros nyújtás vagy zsugorítás,
5. y tengelymenti d távolságú eltolás.

Például az $y=\frac{1}{2}\cos(2x+\pi)-1$ függvénynél:

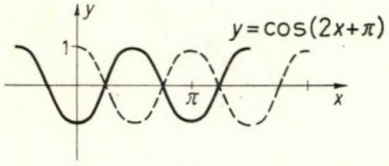
1. $y=\cos x$,
2. $y=\cos 2x$ x tengely irányú $\frac{1}{2}$-re zsugorítás,
3. $y=\cos(2x+\pi)$ x tengely irányú $-\frac{\pi}{2}$ eltolás,
4. $y=\frac{1}{2}\cos(2x+\pi)$ y tengely irányú $\frac{1}{2}$-re zsugorítás,
5. $y=\frac{1}{2}\cos(2x+\pi)-1$ y tengely irányú -1 eltolás. (1—5. ábra).



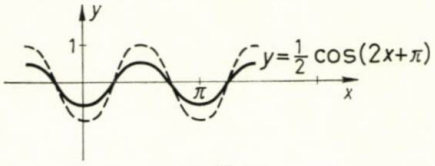
1. ábra



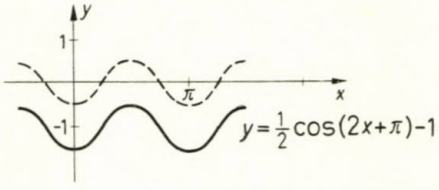
2. ábra



3. ábra



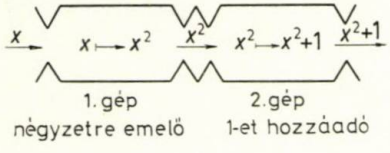
4. ábra



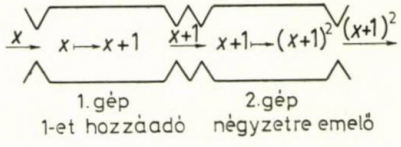
5. ábra

Van olyan tárgyalásmód is, ahol nem a függvényt, hanem a koordinátatengelyeket helyezzük át. Ezzel most nem kívánok részletesebben foglalkozni.

A nyolcadikos matematika-tankönyvek egyik nagyon bölcs újítása, hogy a transzformált függvény előállítását több, egy matematikai művelet elvégzésére alkalmas gép sorbakapcsolásával összefüggésben tárgyalja. Itt minden függvénygrafikon változás egy konkrét matematikai művelethez oly módon kapcsolódik, hogy az egyműveletes gépek sorbakapcsolásával albegrailag, a hozzá tartozó grafikonátalakításokkal grafikusan jutunk el a megoldáshoz. A kiindulás most is az alap-, vagy normálfüggvény, pl. $x \mapsto x^2+1$ vagy $x \mapsto (x+1)^2$ függvények esetében az $x \mapsto x^2$ normálparabola. Gépsémájukat a 6. és a 7. ábra mutatja. A második esetben a hozzáadó gépet a négyzetre emelő gép elé kell kapcsolni.



6. ábra



7. ábra

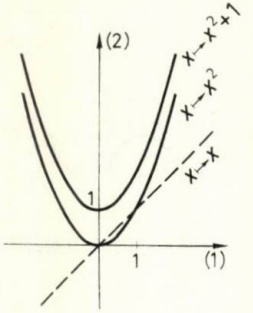
A gépsémák így tökéletesek, csak a hagyományos grafikonszármaztatás okoz problémát: két gépünk, de egy transzformációs lépésünk van, vagy, ha a négyzetre emelést is lépésnek számítjuk, a második esetben a gépsorrend és a lépéssorrend fordított.

A módszer továbbfejlesztéseként célszerű lenne átgondolnunk, mi lenne, ha szakítanánk a származtatás hagyományával, és minden függvény kiindulásául az $x \mapsto x$ legegyszerűbb alapfüggvényt, a normál egyenest választanánk.

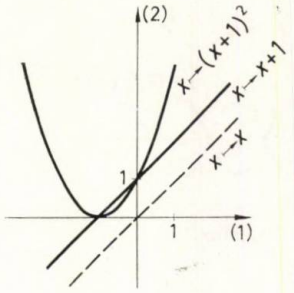
(Meg kell jegyezni, hogy ha a függvényt hozzárendeléssel, és nem egyenlőséggel adjuk meg, megszűnik az y tengely elnevezés létjogosultsága, helyette a helyes elnevezések: (1) tengely, vagy x tengely, és (2) tengely. Sajnos tankönyveink többségé-

ben még nem következetes a jelölés, pl. a gimnáziumok 1. osztálya számára készült tankönyvben egy oldalon szerepel (1) és (2), x és y tengely, vagy ami még ennél is rosszabb, jelöletlen tengely, néhol csak a (2) tengely jelöletlen.)

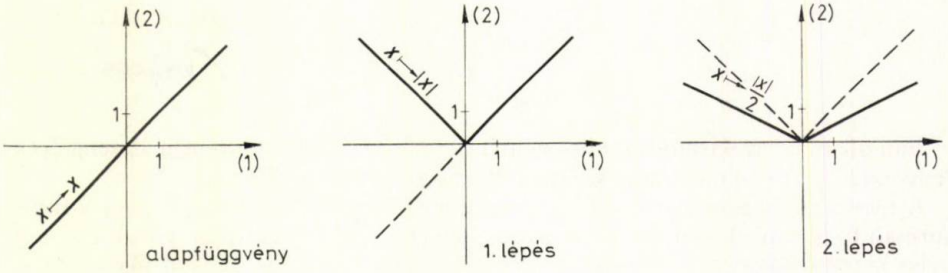
Vegyük szemügyre, hogyan illeszkedik gép és grafikon, ha az említett $x \mapsto x$ kiindulást választjuk! (8—15. ábrák).



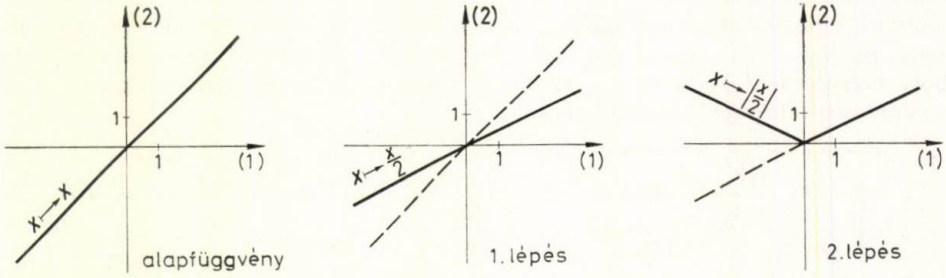
8. ábra



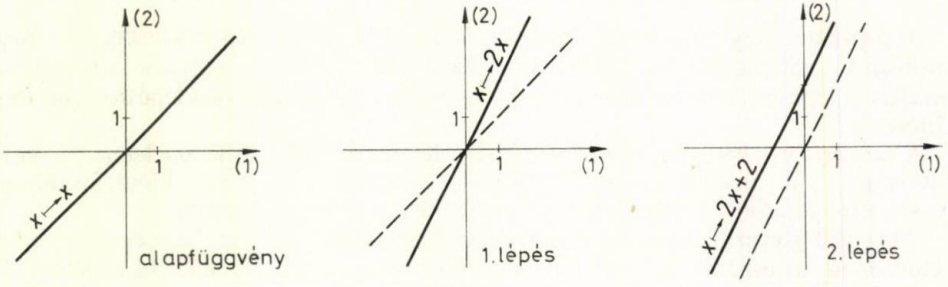
9. ábra



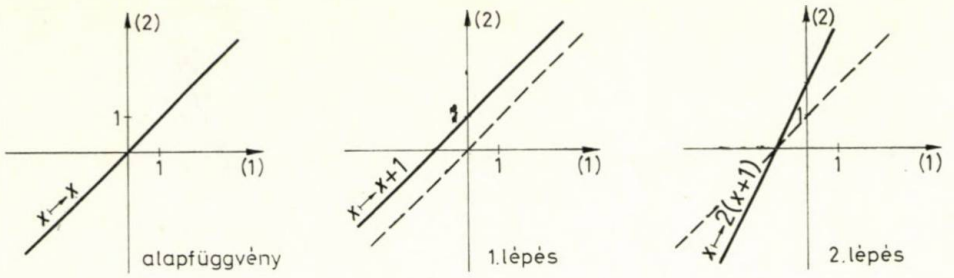
10. ábra



11. ábra



12. ábra



13. ábra

Egyfajta matematikai művelethez egyfajta grafikonváltozás tartozik, nincs külön x és y tengely irányú eltolás vagy zsugorítás, nyújtás, minden transzformáció az 1. tengelytől a (2) tengely irányába értendő.

Nézzük megy néhány további függvény esetében a transzformáció lépéseit $x \mapsto x$ kiindulással!

$x \mapsto \frac{|x|}{2}$

1. gép: abszolútérték képző,

1. lépés: törés és a negatív rész tükrözése.

2. gép: 2-vel osztó $\left(\frac{1}{2}\text{-del szorzó}\right)$.

2. lépés: felére zsugorítás.

$x \mapsto \left|\frac{x}{2}\right|$

1. gép: 2-vel osztó,

1. lépés: felére zsugorítás.

2. gép: abszolútérték képző,

2. lépés: törés és a negatív rész tükrözése.

$x \mapsto 2x+2$

1. gép: 2-vel szorzó,

1. lépés: 2-szeres nyújtás.

2. gép: 2-t hozzáadó,

2. lépés: 2-vel eltolás.

$x \mapsto 2(x+1)$

1. gép: 1-et hozzáadó,

1. lépés: 1-gyel eltolás.

2. gép: 2-vel szorzó,

2. lépés: 2-szeres nyújtás.

$x \mapsto \frac{1}{2}\cos(2x+\pi)-1$

1. gép: 2-vel szorzó,

1. lépés: 2-szeresre nyújtás.

2. gép: π-t hozzáadó,

2. lépés: π-vel eltolás.

3. gép: cosinus képző,

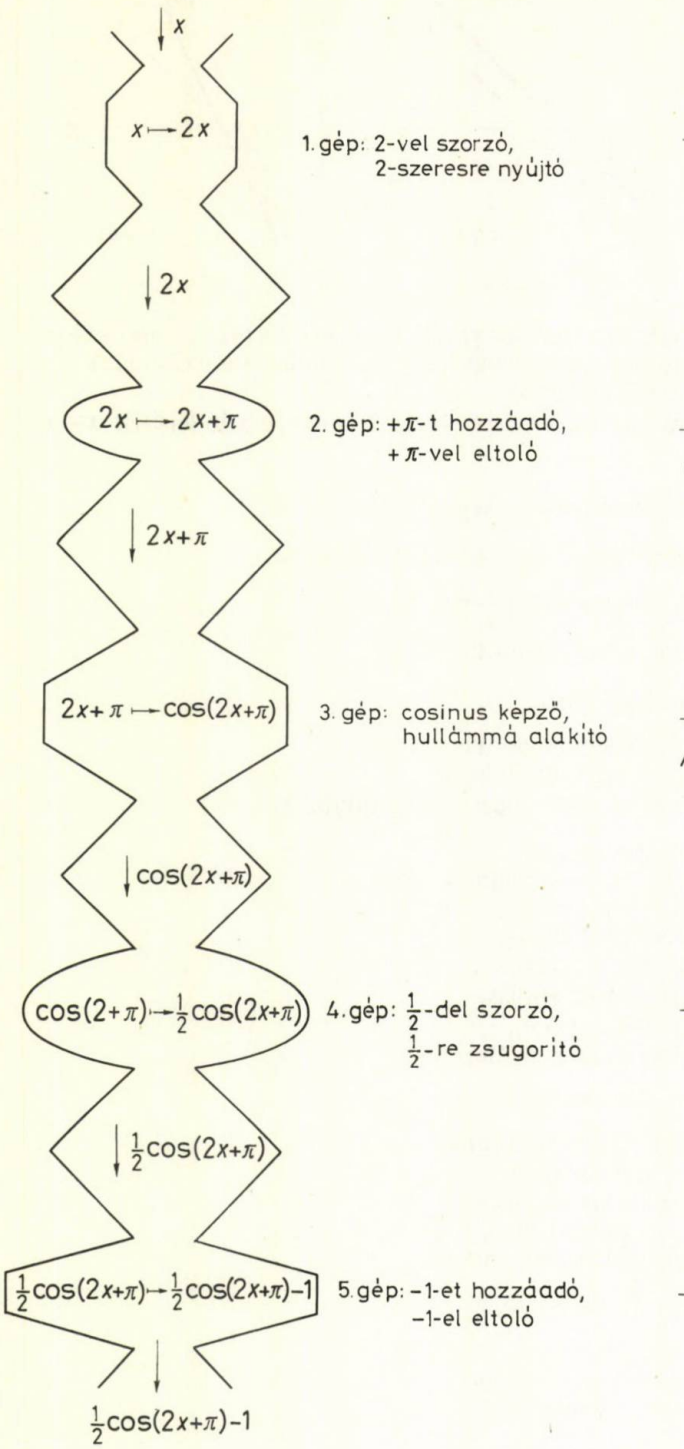
3. lépés: hullámmá görbítés.

4. gép: $\frac{1}{2}$-del szorzó,

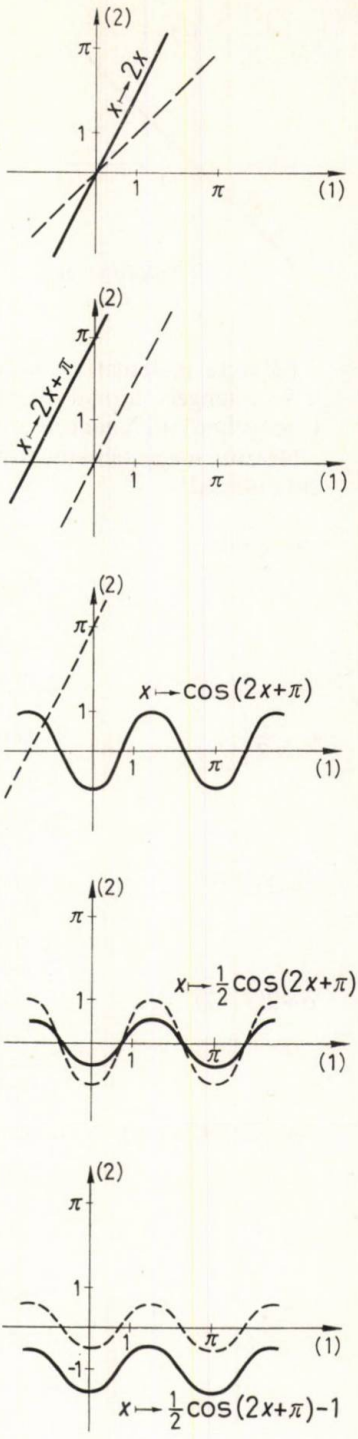
4. lépés: felére zsugorítás.

5. gép: -1-et hozzáadó,

5. lépés: -1-gyel eltolás.



14. ábra



15. ábra

A változások mindig az (1) tengelynél történnek (törés, szakadás). Megtehetjük, hogy minden gépnek nevet adunk, így pl. (önkényes elnevezéseket alkalmazva) hozzáadó gép: grafikont (1) tengelytől eltolja; szorzó gép: grafikont (1) tengelytől nyújtja vagy zsugorítja; négyzetre emelő gép: egyenes (1) tengelyről parabolává görbíti; reciprok képző gép: (1) tengelynél szakítja és hiperbolává görbíti; abszolútérték képző gép: egyenest vagy görbét (1) tengelynél törő, és a negatív részt tükrözi. Lehetnek ezek a rövid magyarázatok a matematikában jártas olvasó számára primitívek, mégse haszontalanok az olyan gyerekek számára, akik a legegyszerűbb fogódzkodót keresik a grafikonok dzsungelében.

A függvények ilyen származtatása alkalmas az algebrai azonosságok igazolására (pl. a $2(x+1)=2x+2$ vagy a $(2x)^2=4x^2$ azonosságok). A függvények ábrázolásával nyilvánvalóvá tehető, hogy, bár más úton, de ugyanarra a végeredményre jutunk.

A lehetőség tehát adott, alkalmazzuk minél hatásosabban!

DR. KISS SÁNDOR
főiskolai adjunktus
Bessenyei György Tanárképző Főiskola, Nyíregyháza

A skatulya-elv tanításának megalapozása

A skatulya-elv Peter Gustav Lejeune *Dirichlet*-től (1805—1859) származik. Német matematikus volt, akinek a családja Franciaországból emigrált Németországba. Matematikai tehetsége igen korán megmutatkozott. Eredményei elsősorban analízisben és számelméletben jelentősek.

A *skatulya-elv* lényege egyszerűen megfogalmazható, magától értetődő:

Ha adott n skatulyában n-nél több tárgyat akarunk elhelyezni, akkor lesz legalább egy olyan skatulya, amelybe legalább két tárgy kerül.

Ennek az egyszerű gondolatnak ismeretében számtalan nehéznek tűnő matematikai problémát ügyesen meg tudunk ragadni.

Feladatmegoldásaink során igen gyakran az elv módosított változatait alkalmazzuk:

1. *változat: Adott n skatulya és* $k \cdot n+r$ $(0<r)$ *tárgy. Ha ebben az esetben helyezzük el a tárgyakat, akkor lesz legalább egy olyan skatulya, amelyben legalább* $k+1$ *tárgy van.*

2. *változat: Végtelen halmazokra is átvihetjük a skatulya-elvet. Ha n skatulyában végtelen sok tárgyat akarunk elhelyezni, akkor lesz legalább egy olyan, amelyben végtelen sok tárgy van, azaz nem lehet mindegyikben véges sok.*

A szakkörünkben feldolgozott feladatanyag tartalmilag elsősorban algebrai, számelméleti, geometriai tárgyú, illetve néhány köznapi jellegű volt. Az eredményes feldolgozáshoz a megfelelő matematikai ismeretek mellett nélkülözhetetlen az indirekt bizonyítás megfelelő szintű alkalmazása.

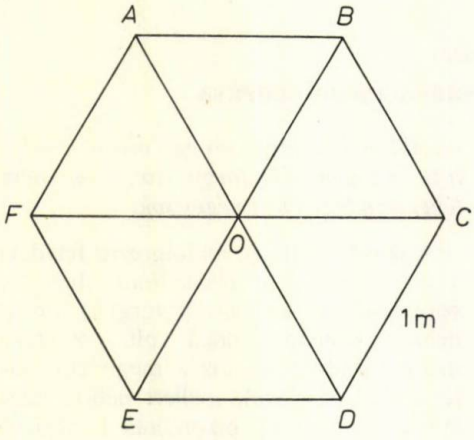
Először kiemelünk néhány egyszerű feladatot, amelyek az elv lényegét szemléltetik. Ezeket már 7. osztályban is lehet alkalmazni. A későbbiekben elsős, másodikos gimnazistáknak való feladatanyagot is közlünk. (A közölt feladatanyagot szakkörben próbáltam ki, s ebben hetedikestől második gimnazistáig bezárólag vannak tagok. Ezért foglalkozom csak e korosztálynak szánt feladatokkal.)

1. *feladat: Biztos-e, hogy Sopronban van két olyan ember, akiknek ugyanannyi hajszála van? És Budapesten?*

A feladat megoldásához segítségül hívhatjuk az Új Magyar Lexikont, amely szerint egy embernek kb. százezer hajszála van. Sopron lakosainak száma ennél jóval kevesebb, ezért a válasz: nem

biztos. Budapesten már biztosan találunk legalább két olyan embert, akiknek ugyanannyi hajszála van. Ennél többet is mondhatunk, ha a skatulya-elv módosított 1. változatát alkalmazzuk. Ha Budapest lakosainak számát 2 milliónál többnek vesszük, akkor találunk kb. 20 olyan embert, akiknek ugyanannyi hajszála van.

2. *feladat: Egy* 1 m *oldalú szabályos hatszög belsejében* 7 *pontot helyeztünk el. Igazold, hogy van közöttük legalább* 2 *olyan, amelyek egymástól mért távolsága* 1 m*-nél kisebb!*



1. ábra

A feladatban a nehézséget az jelenti, hogy a skatulyákat a tanulónak kell képeznie, s nincs előre megadva. Módszertanilag ez a nehezebb típus. A feladat megoldásához képezzünk 6 db egybevágó egyenlő oldalú háromszöget (1. ábra)! Ezek lesznek a skatulyák. Innen már világos, hogy 6 skatulyánk van és 7 tárgy (pont), tehát lesz legalább egy olyan skatulya, amelybe két tárgy került. (Ezek egymástól mért távolsága nyilván kisebb 1 m-nél.)

3. *feladat: Egy* 30*-as létszámú osztályban mindenki írt matematika dolgozatot, amit* 1—5*-ig jeggyel értékeltek. Igazold, hogy volt legalább* 6 *olyan tanuló, akik azonos jegyet kaptak! Volt-e* 7 *azonos jegyű tanuló?*

A feladat a skatulya-elv 1. változata segítségével oldható meg. A skatulyák itt adottak (érdemjegyek).

4. *feladat: Legalább hány tanulója van annak az iskolának, amelynek tanulói közül biztosan ki tudunk választani* 3 *olyat, akiknek születésnapja azonos napon van?*

A feladat az előző megfordításának tekinthető. Korábban tudtuk az elhelyezendő elemek számát, s kerestük, hogy egy skatulyába hány elem kerül. Most azt tudjuk, hogy létezik legalább egy olyan skatulya, amelyben biztosan van 3 elem. Keressük azt a minimális elemszámot, amely mellett ez már biztosan lehetséges. A megoldás során az évet 366 naposnak kell venni a szökőnap miatt. Ezért a feladatra a válasz: $366 \cdot 2 + 1 = 733$. Ennél kevesebb tanuló esetén nem biztos, hogy teljesül a feladat feltétele.

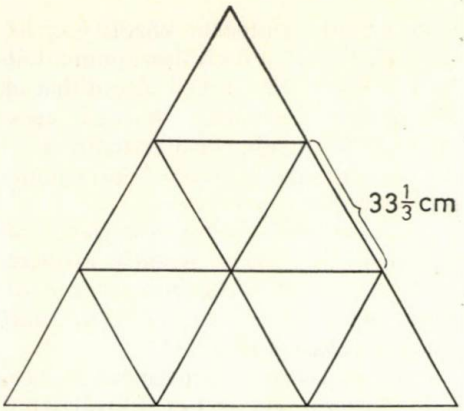
A következő feladat jól ismert, gyakran alkalmazott átfogalmazása a skatulya-elvnek.

5. *feladat: Egy ládában háromféle golyó van: piros, kék, zöld. Mindegyikből* 20—20 *db. Hány golyót kell kiemelnünk odapillantás nélkül, ha azt akarjuk, hogy legyen a kihúzottak között*

a) legalább 2 *azonos színű,*
b) legalább 3 *piros,*
c) minden színből legalább 1?

A fenti bemelegítő példák után nézzünk néhány nehezebbet, amelyeknek egy része már szerepelt valamilyen matematikai versenyen. Ezek megoldása különféle példatárakban hozzáférhető (lásd irodalom!), ezért a megoldásokat gyakran csak vázolom, s nem törekszem pontos kidolgozásra. A geometriai feladatokban úgy kell a skatulyákat megválasztani, hogy a kérdéses távolság, terület, térfogat jól leolvasható legyen. A feladatanyag feldolgozását csak nagyon jó képességű nyolcadikosoknak, illetve gimnazistáknak javasolom.

6. *feladat: Egy szabályos háromszög alakú céltábla oldala* 1 m. *A céltáblát* 10 *lövés érte. Igazoljuk, hogy van két olyan*



2. ábra

találat, amelyek 34 cm*-nél közelebb vannak egymáshoz!*

Nyilvánvaló, hogy 9 skatulyát kell képeznünk a 2. ábrán látható módon.

7. *feladat: Egy* 8 cm *oldalú négyzetbe találomra berajzolunk* 260 *pontot. Bizonyítsuk be, hogy a pontok között biztosan lesz* 2, *amelyeknek egymástól mért távolsága* 1 cm*-nél kisebb!*

Képezzünk $16 \cdot 16 = 256$ db fél cm oldalú négyzetet. Ezek között lesz legalább egy olyan, amelybe 2 pont jut. Ilyen méretű négyzetben a legnagyobb távolság (az átló) Pitagorasz tétele alapján kiszámítható; s ez kisebb, mint 1 cm.

8. *feladat: Jelöljünk ki a négyzetlapon* 5 *pontot úgy, hogy a közöttük fellépő legkisebb távolság a lehető legnagyobb legyen! Mekkora ez a távolság?*

A „négyzetlapon" kifejezés azt jelenti, hogy a belsejében vagy a határán kell kijelölni az 5 pontot. Bontsuk a négyzetet négy egybevágó négyzetre, most ezek lesznek az alkalmas skatulyák. Innen már a Pitagorasz-tétel alkalmazásával megoldható a feladat.

9. *feladat: Egy négyzet alakú,* 1 m^2 *felületű céltáblát* 49 *találat ért. Bizonyítsuk be, hogy van* 4 *olyan találati pont, amelyek közül bármely kettőnek a távolsága kisebb, mint* 36 cm!

Képezzünk 16 skatulyát (16 db egybevágó négyzetre kell bontani az eredeti céltáblát)! Legalább 1 olyan lesz, amelyet 4 találat ért. Alkalmazzuk itt is a Pitagorasz-tételt! A feladatot átfogalmazhatjuk pl. a következő formában: A feltétel változatlan. Bizonyítsuk be, hogy van 4 olyan találati pont, amely lefedhető egy 18 cm sugarú körlappal!

10. *feladat: Egy* 70×70*-es méretű céltáblát* 50 *lövés ért. Bizonyítsuk be, hogy van két olyan találat, amelyek távolsága* 15 *egységnél kisebb!*

Bontsuk a táblát 10 egységnyi oldalú egybevágó négyzetekre! 49 db lesz, tehát lesz legalább egy olyan, amelybe két találat jutott. Számítsuk ki a négyzet átlóját!

11. *feladat: Egységnyi oldalú négyzet belsejében adott* 19 *pont. Igazoljuk, hogy kiválasztható* 3 *olyan, amelyek által meghatározott háromszög területe kisebb* $\frac{1}{18}$ *egységnél!*

Bontsuk a négyzetet 9 egybevágó négyzetre! Ezek alkalmas skatulyák lesznek. A bizonyítás során használjuk fel, hogy egységnyi oldalú négyzetbe írt háromszög területe legfeljebb fél egység lehet! Ez külön bizonyításra szorul!

12. *feladat: Egy egységnyi kocka belsejében adott* 25 *pont. Mutassuk meg, hogy mindig létezik legalább egy olyan tetraéder, amelynek csúcsai az adott pontok közül valók, s térfogata legfeljebb* $\frac{1}{48}$ *egység!*

8 db egybevágó, fél egységnyi oldalú kocka lesz az alkalmas skatulya. A feladat lényegében az előzőnek térbeli megfelelője.

13. *feladat: Ugyanabba az egységsugarú körbe tetszőlegesen beírtunk egy háromoldalú és egy négyoldalú szabályos sokszöget. Igazolandó, hogy a kör így keletkezett ívei között van olyan, amelynek a mérőszáma legfeljebb* $\frac{\pi}{12}$. (Ha két csúcs egybeesik, akkor távolságuk 0.)

A megoldáshoz lásd a 3. ábrát! Tekintsük a szabályos háromszög csúcsai által meghatározott köríveket! Ezek hossza $\frac{2\pi}{3}$ lesz, s legalább egy íven két négyzetcsúcs lesz. E három ív valame-

A kitűzött feladatok és megoldásuk

1. feladat

Bizonyítsuk be, hogy ha n pozitív egész számot jelöl, akkor

(1) $$4^n+2^n+1$$

csak abban az esetben lehet törzsszám, amikor n a 3-nak nemnegatív egész kitevős hatványa!

I. megoldás:

Ha n nem 3-nak nemnegatív egész kitevős hatványa, akkor n vagy $3^k\cdot(3m+1)$ $k\geqq 0$, $m\geqq 1$ alakú, vagy $3^k\cdot(3m+2)$ $k\geqq 0$, $m\geqq 0$ alakú.

a) Legyen $n=3^k(3m+1)$ $k\geqq 0$, $m\geqq 1$.

Ekkor $2^{(3^k)}=a$ helyettesítéssel

$$4^{3^k(3m+1)}+2^{3^k(3m+1)}+1 = a^{6m+2}+a^{3m+1}+1 = a^2\cdot a^{6m}+a\cdot a^{3m}+1 =$$

$$= a^2(a^{6m}-1)+a(a^{3m}-1)+a^2+a+1 = a^2\cdot(a^6-1)(a^{6(m-1)}+\ldots+a^6+1)+$$

$$+a(a^3-1)(a^{3(m-1)}+a^{3(m-2)}+\ldots+a^3+1)+a^2+a+1.$$

Mivel $a^6-1=(a^3+1)(a^3-1)=(a^3+1)(a-1)(a^2+a+1)$, ezért az összeg mindhárom tagja, vagyis (1) osztható (a^2+a+1)-gyel. Ugyanakkor $k\geqq 0$, $m\geqq 1$ miatt $1<a^2+$ $+a+1<4^n+2^n+1$.

Ezért (1)-nek van valódi osztója.

b) Legyen $n=3^k(3m+2)$, $k\geqq 0$, $m\geqq 0$.

Ugyancsak a $2^{(3^k)}=a$ helyettesítéssel

$$4^{3^k(3m+2)}+2^{3^k(3m+2)}+1 = a^{6m+4}+a^{3m+2}+1 = a^4(a^{6m}-1)+a^2(a^{3m}-1)+a^4+a^2+1.$$

Mivel $a^4+a^2+1=(a^2+a+1)(a^2-a+1)$, ezért az *a)* rész eredményeinek felhasználásával azt kapjuk, hogy (1) ebben az esetben sem lehet törzsszám.

II. megoldás:

(1)-et a $2^{2n}+2^n+1$ alakba írva a következő általánosítási lehetőséghez jutunk:

Legyen a, k és n egész, ahol $|a|>1$, $k>1$ és $n>0$. Ha létezik olyan p prím, hogy $p\nmid k$ és $p\mid n$,akkor a

$$B(a,n,k)=\sum_{i=0}^{k-1} a^{ni}$$

szám összetett.

Bizonyítás: Legyen $n=qm$, ahol $(m,k)=1$, és q prímosztói egyben k prímosztói is ($(k,n)=1$ esetén $q=1$). Az oszthatósági szabályokból és B definíciójából adódik, hogy

$$a^{kn}-1=(a^n-1)\cdot B(a,n,k),$$

$$a^{kq}-1=(a^q-1)\cdot B(a,q,k).$$

$q\mid n$, ezért $a^{kq}-1\mid a^{kn}-1$, ugyanakkor $(k,m)=1$ miatt $(a^{kq}-1, a^{mq}-1)=a^q-1$, így $B(a,q,k)\mid B(a,n,k)$.

$k>1$ és a feltételek között szereplő p létezése miatt, $m>1$-ből

$$1<|B(a,q,k)|<|B(a,n,k)|.$$

A $B(a,n,k)$ számnak tehát van valódi osztója, vagyis $B(a,n,k)$ nem lehet törzsszám.

Az eredeti feladatban $a=2$, $n=2$, $k=3$ eset szerepel.

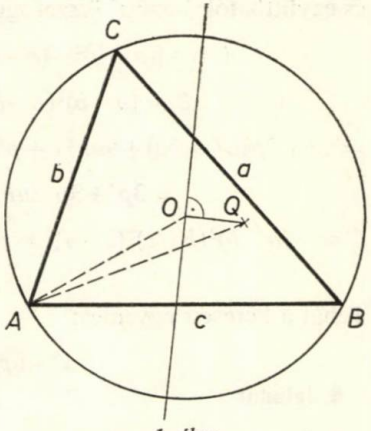
2. feladat

Egy háromszög oldalainak mérőszáma a, b és c. Mekkora a sugara annak a legkisebb zárt körlemeznek, amellyel teljesen lefedhető ez a háromszög?

Megoldás:

Jelöljük az a, b, c oldalú háromszög csúcspontjait A, B, illetve C-vel! A háromszög és a kör konvexitása miatt, ha egy körlemez tartalmazza a háromszög csúcsait, akkor tartalmazza a háromszög minden pontját. Ezért keressük a sík azon Q pontját, amelyre az $y=\max\{QA, QB, QC\}$ érték a minimális. Q lesz a lefedő kör középpontja, y minimuma pedig a sugara.

a) Legyen ABC háromszög hegyesszögű (1. ábra), köré írható körének középpontja 0.



1. ábra

Ha $Q \neq O$, akkor a QO szakasz O végpontjában QO-ra állított merőleges olyan két félsíkra osztja a síkot, melyek közül a Q pontot nem tartalmazó félsík tartalmazza a háromszög legalább egyik csúcsát. (Ellenkező esetben a köré írható kör középpontja nem lenne a háromszög belső pontja, holott a háromszög hegyesszögű.) Ezt a csúcsot például A-val jelölve QOA háromszögben $QOA\sphericalangle > 90°$, amiből $QA > OA$ következik. $OA=r$ sugarú körrel viszont lefedhető a háromszög, ezért y csak $Q=O$ esetén lehet minimális. Az y az r-nél kisebb nem lehet, mert ekkor a csúcspontok nem lennének lefedve. Ezért y minimuma éppen a háromszög köré írható kör sugarával egyenlő. Ennek értékét a háromszög köré írható kör sugarára vonatkozó összefüggés és a Héron-képlet felhasználásával kapjuk:

$$r = \frac{abc}{4t} = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}, \quad \left(s = \frac{a+b+c}{2}\right).$$

b) Derékszögű és tompaszögű háromszög esetén a lefedő kör átmérője a leghosszabb oldalnál kisebb nem lehet. Ha leghosszabb oldal fölé Thalész-kört rajzolunk, akkor a harmadik csúcs a látószögekre vonatkozó összefüggés alapján a körön belül, vagy a körvonalon van.

Ezért

$$r = \frac{\max\{a, b, c\}}{2}.$$

3. feladat

Az $x^3+px+q=0$ egyenletben a p, q együtthatók valós számok, $q \neq 0$. Ennek az egyenletnek a gyökei legyenek a, b és c. Írjuk fel azt az egyenletet, amelynek gyökei: $(a-b)^2$, $(b-c)^2$ és $(c-a)^2$.

Megoldás:

Írjuk fel az adott egyenletre a gyökök és együtthatók közötti összefüggéseket:

$$(1)\quad a+b+c=0,$$

$$(2)\quad ab+bc+ca=p,$$

$$(3)\quad abc=-q.$$

Alakítsuk át a (2) egyenletet (1) felhasználásával:

$$p = ab+c(a+b) = ab-(a+b)^2 = -(a-b)^2-3ab.$$

Ebből, és hasonló átalakításokból kapjuk, hogy

$$(a-b)^2 = -p-3ab,$$
$$(b-c)^2 = -p-3bc,$$
$$(c-a)^2 = -p-3ca.$$

Legyen a keresett egyenlet $x^3+Ax^2+Bx+C=0$ alakú. Erre alkalmazva a gyökök és együtthatók közötti összefüggést kapjuk:

$$A = -[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2] = 3p+3(ab+bc+ca) = 6p,$$

$$B = (a-b)^2(b-c)^2+(b-c)^2(c-a)^2+(c-a)^2(a-b)^2 =$$

$$= p^2+3p(ab+bc)+9ab^2c+p^2+3p(ac+bc)+9abc^2+p^2+3p(ab+ac)+9a^2bc =$$

$$= 3p^2+3p(2ab+2bc+2ca)+9abc(a+b+c) = 9p^2,$$

$$C = -(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 = p^3+3p^2(ab+bc+ca)+9pabc(a+b+c)+27(abc)^2 =$$

$$= 4p^3+27q^2.$$

Tehát a keresett egyenlet:

$$x^3+6px^2+9p^2x+4p^3+27q^2 = 0.$$

4. feladat

Valamely ellipszisnek mely pontjaiba futó vezérsugarak reciprok értékeinek négyzetösszege a legkisebb, illetve a legnagyobb?

I. megoldás:

Legyen a fél nagytengely a, a fél fókusztávolság c, a vezérsugarak hossza pedig r_1, illetve r_2.

$$\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2} = \frac{r_1^2+r_2^2}{r_1^2r_2^2} = \frac{\frac{1}{2}[(r_1+r_2)^2+(r_1-r_2)^2]}{\frac{1}{16}[(r_1+r_2)^2-(r_1-r_2)^2]^2} = 8\frac{4a^2+(r_1-r_2)^2}{[4a^2-(r_1-r_2)^2]^2}.$$

A tört értéke akkor lesz a legkisebb, illetve a legnagyobb, ha $(r_1-r_2)^2$ a lehető legkisebb, illetve a legnagyobb. A háromszög-egyenlőtlenség alapján $0 \leqq |r_1-r_2| \leqq 2c$. Ezért a legkisebb érték

$$8\cdot\frac{4a^2}{16a^4} = \frac{2}{a^2},$$

amit $r_1=r_2$-nél, vagyis az ellipszis kistengelyének a végpontjaiban kapunk.

A vezérsugarak reciprokai négyzetösszegének legnagyobb értéke

$$8\cdot\frac{4a^2+4c^2}{(4a^2-4c^2)^2} = \frac{2(a^2+c^2)}{(a^2-c^2)^2},$$

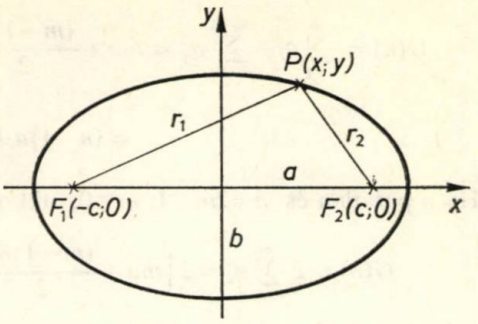
és ezt az értéket $|r_1-r_2|=2c$-nél; a nagytengely végpontjaiban kapjuk.

II. megoldás:

Vegyünk fel az ellipszis síkjában egy koordináta-rendszert a 2. ábrának megfelelő módon.

Ekkor az ellipszis egyenlete

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{1}$$



2. ábra

Mivel $r_1^2=(x+c)^2+y^2$ és $r_2^2=(x-c)^2+y^2$, ezért az ellipszis tetszőleges P pontjába futó vezérsugarak reciprok értékeinek négyzetösszege

$$\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}=\frac{2(x^2+y^2+c^2)}{(x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2}. \tag{2}$$

(1)-ből kifejezve y^2-et és behelyettesítve (2)-be kapjuk:

$$\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}=2a^2\cdot\frac{c^2x^2+a^4}{(c^2x^2-a^4)^2}.$$

Keressük a $[-a, a]$-on értelmezett

$$x\to f(x):=2a^2\frac{c^2x^2+a^4}{(c^2x^2-a^4)^2}$$

függvény szélsőérték helyeit.

Az f függvény derivált függvénye

$$x\to f'(x)=4a^2c^2\frac{c^2x^2+3a^4}{(a^4-c^2x^2)^3}x$$

függvény. Ennek zérushelye $x=0$. Ha $-a\leqq x<0$, akkor $f'(x)<0$ és ha $0<x\leqq a$, akkor $f'(x)>0$. Ezért az f függvénynek $x=0$-nál minimumhelye, $x=\pm a$-nál pedig maximumhelye van. Ezekhez az értékekhez tartozó ellipszispontok pedig a kistengely, illetve a nagytengely végpontjai.

5. feladat

Legyen $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ olyan számtani sorozat, amelyre $a_1=a$ és $a_2-a_1=d$. Jelölje továbbá $G(n)$ a $0, a_1, a_1, a_2, a_2, a_3, a_3, \ldots$ sorozat első n elemének összegét!

a) Állítsuk elő $G(n)$-t, a, d és n függvényeként!

b) Megválasztható-e a és d oly módon, hogy $G(n)$ teljes négyzet legyen n-nek végtelen sok értékére?

c) Bizonyítsuk be, hogy bármely két n, m $(n>m)$ pozitív egész szám esetén érvényes a

$$G(n+m)-G(n-m)=mnd+2m(a-d)$$

egyenlőség!

Megoldás:

a) Határozzuk meg $G(n)$ értékét először páros n-re. Legyen $n=2m$, $m>0$. Ekkor

$$G(n)=\sum_{i=1}^{m} a_i+\sum_{j=1}^{m-1} a_j = ma+\frac{(m-1)m}{2}d+(m-1)a+\frac{(m-2)(m-1)}{2}d=$$

$$=(n-1)a+\left(\frac{n}{2}-1\right)^2 d.$$

Ha n páratlan és $n=2m+1$, $m\geqq 0$, akkor

$$G(n)=2\sum_{i=1}^{m} a_i = 2\left(ma+\frac{(m-1)m}{2}d\right)=(n-1)a+\frac{(n-3)(n-1)}{4}d.$$

b) $G(n)$ teljes négyzet minden páros n-re, ha $a=0$ és $d=k^2$, $k\in\mathbf{N}$, és minden páratlan n-re, ha $a=\frac{d}{2}$ és $d=k^2$. Ez utóbbi esetben ugyanis

$$G(n)=(n-1)\frac{d}{2}+\frac{(n-3)(n-1)}{4}d=(n-1)\,d\,\frac{2+n-3}{4}=\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 k^2.$$

c) Ha n és m egyidejűleg páros, vagy egyidejűleg páratlan, akkor az $n+m$ és az $n-m$ is páros. Ezért ekkor

$$G(n+m)-G(n-m)=(n+m-1)a+\left(\frac{n+m}{2}-1\right)^2 d-(n-m-1)a-\left(\frac{n-m}{2}-1\right)^2 d=$$

$$=2ma+nmd-2md=nmd+2m(a-d).$$

Ha n és m közül egyik páros, másik páratlan, akkor $n+m$ és $n-m$ is páratlan, így

$$G(n+m)-G(n-m)=(n+m-1)a+\frac{(n+m-3)(n+m-1)}{4}d-(n-m-1)a-$$

$$-\frac{(n-m-3)(n-m-1)}{4}d=2ma+nmd-2md=nmd+2m(a-d).$$

6. feladat

Helyezzük el az euklideszi tér pontjait egy derékszögű koordináta-rendszerben! Rácspontnak nevezzük azokat a pontokat, amelyeknek mindhárom koordinátája egész szám.

a) Adjunk meg nyolc rácspontot úgy, hogy az ezeket összekötő szakaszok közül egyik se tartalmazzon rácspontot a belsejében!

b) Bizonyítsuk be, hogy bármiképpen választunk kilenc rácspontot, az ezeket összekötő szakaszok között mindig lesz olyan, amely belsejében is tartalmaz rácspontot!

Megoldás:

Osztályozzuk a rácspontokat koordinátáinak 2-vel vett osztási maradéka szerint: a $P_i(x_i, y_i, z_i)$ és a $P_j(x_j, y_j, z_j)$ pontok akkor és csak akkor tartozzanak egy osztályba, ha $x_i\equiv x_j(2)$, $y_i\equiv y_j(2)$ és $z_i\equiv z_j(2)$. Ekkor az osztályok száma $2^3=8$, ezért tetszőlegesen választva kilenc rácspontot, biztosan lesz közöttük legalább kettő, amelyek ugyanabba az osztályba tartoznak.

P_1-gyel és P_2-vel jelölve ezeket a pontokat, a P_1P_2 szakasz felezőpontjának koordinátái $\frac{x_1+x_2}{2}$, $\frac{y_1+y_2}{2}$ és $\frac{z_1+z_2}{2}$ egész számok, vagyis a szakasz felezőpontja rácspont.

Nyolc pontot még meg lehet adni úgy, hogy az ezeket összekötő szakaszok közül egyik se tartalmazzon rácspontot a belsejében. Nyolc ilyen lehetséges pont például a (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1) és (1, 1, 1) koordinátájú pont.

7. feladat

Legyen a pozitív, n pozitív egész; továbbá $x_1, x_2, \ldots, x_n$ valós szám! Bizonyítsuk be, hogy

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2+a(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)$$

előállítható n db teljes négyzet összegeként!

Megoldás:

Legyen $x_1+x_2+\ldots+x_n=s$. Ekkor

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2+a(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)=a\left[(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)+\frac{1}{a}s^2\right].$$

Alkalmas λ valós számmal ez a kifejezés

$$a[(x_1-\lambda s)^2+(x_2-\lambda s)^2+\ldots+(x_n-\lambda s)^2]$$

alakba írható.

λ meghatározásához végezzük el a négyzetre emelést:

$$a[(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)-2\lambda s(x_1+\ldots+x_n)+n\lambda^2 s^2]=$$

$$=a[(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)-(2\lambda-n\lambda^2)s^2].$$

λ-nak tehát a

$$-2\lambda+n\lambda^2=\frac{1}{a}$$

összefüggést kell kielégítenie.

Ebből

$$\lambda=\frac{1}{n}\cdot\left(1+\sqrt{1+\frac{n}{a}}\right).$$

Ezért

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2+a(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)=$$

$$=(\sqrt{a}x_1-\lambda s\sqrt{a})^2+(\sqrt{a}x_2-\lambda s\sqrt{a})^2+\ldots+(\sqrt{a}x_n-\lambda s\sqrt{a})^2.$$

Helyreigazítás

Lapunk ez évi 4. számának 118. oldalán a jobb oldali hasábban felülről a 16. sorban 0110 helyett 0101 olvasandó!

A hibáért Kedves Olvasóink szíves elnézését kérjük.

A szerkesztőség

DR. SCHARNITZKY VIKTOR
tanszékvezető főiskolai tanár
Budapest

Matematikus vándorgyűlés Győrött

A Bolyai János Matematikai Társulat az 1985. évi (sorrendben a 25.)* Rátz László Vándorgyűlését július 2. és július 5. között tartotta meg Győrött több, mint 550 résztvevővel.

A plenáris ülésre érkezőket a Kisfaludy Színház előcsarnokában videofilm vetítéssel fogadták. A film bemutatta a megye legszebb tájait és műemlékeit.

A plenáris ülést **Császár Ákos** akadémikus, a Társulat elnöke nyitotta meg, majd **Jankovits György,** a Győr-Sopron Megyei Tanács elnökhelyettese köszöntötte a vándorgyűlés résztvevőit és rövid áttekintést adott a megye és a város életéről.

Az üdvözlő beszédek után **Czapáry Endre,** a *Beke Manó Emlékdíj* Bizottság titkára ismertette a Bizottság határozatát az 1985. évi Beke Manó Emlékdíjak odaítéléséről.

A *Beke Manó Emlékdíj* második fokozatát kapta

Asztalos Kálmánné, a budapesti Virányos úti Általános Iskola tanítója;
Csabai Attiláné, a zalakomári Általános Iskola tanítója;
Kovácsné Győri Ida, a szegedi Juhász Gyula Tanárképző Főiskola nyugalmazott adjunktusa;
Novák Lászlóné, az Országos Pedagógiai Intézet Matematikai Osztályának helyettes vezetője;
Oláh György, a komárnói Gépipari Szakközépiskola tanára;
Szepesi László, a miskolci Kilián György Gimnázium tanára, megyei vezető szakfelügyelő;
Tóth László, a lébénymiklósi 1. sz. Általános Iskola tanára, megyei vezető szakfelügyelő.

A díjakat **Császár Ákos** akadémikus, a Társulat elnöke adta át.

A díjátadás után **Dömölky Bálint,** a Számítástechnikai Koordinációs Intézet vezetője a 80 éve született és 1976-ban elhunyt Kalmár László akadémikus munkásságáról adott áttekintést *Logika, számítástechnika: Kalmár László* címmel. Utána **Gazsó Ferenc** művelődési miniszterhelyettes tartott előadást *Az oktatásügy helyzete a miniszterhelyettes szemével* címmel.

A következő napokban a vándorgyűlés résztvevői 4 szekcióban folytatták munkájukat. Az egyes szekciókban a következő előadások hangzottak el, illetve szemináriumok működtek:

Alsó tagozatos szekció

Káldi Éva: „Szendvicsóra" = összevisszaság?
Pápay Péter: Szakmai-módszertani hibák elemzése.
C. Menényi Eszter: Az alsó tagozatos matematika-tanterv korrekciója.
Juhász István: A valószínűség tanításáról.

* Az eddig megtartott 25 vándorgyűlés helyszíne: 1961: Debrecen; 1962: Pécs; 1963: Eger; 1964: Miskolc; 1965: Keszthely; 1966: Szombathely; 1967: Szeged; 1968: Nyíregyháza; 1969: Veszprém; 1970: Sopron; 1971: Miskolc; 1972: Debrecen; 1973: Győr; 1974: Pécs; 1975: Dunaújváros; 1976: Baja; 1977: Veszprém; 1978: Szombathely; 1979: Nyíregyháza; 1980: Salgótarján; 1981: Miskolc; 1982: Kecskemét; 1983: Szeged; 1984: Komárom; 1985: Győr.

Perlaky Ernőné—Tóth László: Közös gondok, közös feladatok az általános iskola alsó és felső tagozatán (a Felső tagozatos szekcióval közösen).
Bálint Sándorné: Szöveges feladatok megoldása.

A feladatmegoldó szemináriumokat *Káldi Éva* és *Pintér Istvánné,* a korrekciós terv részleteiről szóló beszélgetést *C. Neményi Eszter* vezette.

Felső tagozatos szekció

Tóth Tiborné: Az általános és a középiskola közötti átmenet kérdéseiről a Győr-Sopron megyei tapasztalatok tükrében (a Középiskolai szekcióval közösen). Az előadáshoz kapcsolódó ankétot *Urbán János* vezette.
Pálfalvy Józsefné—Dusza Árpád: Fakultáció.
Novák Lászlóné: A felső tagozatos matematika-tanterv korrekciója.
Nemetz Tibor: Valószínűségi szemlélet — statisztikus módszerek.

A feladatmegoldó szemináriumokat *Bíró Balázsné, Salamon Éva* és *Tóth László* vezette.

Középiskolai szekció

Egyes előadások csak a gimnáziumi, mások csak a szakközépiskolai vagy a szakmunkásképző alszekció közönsége előtt hangzottak el.
Czapáry Endréné: Tapasztalatok a szakközépiskolai matematikatanításban.
Koller Lászlóné: A szakmunkásképzés aktuális problémáiról.
Kajos László: Milyen lehetőségeik vannak a szakmunkástanulóknak arra, hogy a számítástechnikával ismerkedjenek?
Az OOK videoanyaga: Axiomatizálás a gömbön I—II. Bevezetőt mondott: *Pálmay Lóránt.*
Lénárt István: Érdemes axiomatizálnunk a gömbön.
Gerzanics Andrásné: Versenyek és játékos matematikai vetélkedők a szakmunkásképző iskolákban.

A feladatmegoldó szemináriumokat *Bogdán Zoltán, Csorba Ferenc* és *Náfrádi Ferenc* vezette.

Felsőoktatási szekció

Raffai Mária: Alapozó és alkalmazó számítástechnikai képzés a Közlekedési és Távközlési Műszaki Főiskolán.
Iszály Ferenc—Nagy Mihály: Személyi számítógépek alkalmazása a tanítóképzésben.
Pach János: A diszkrét geometria néhány nagy problémájáról.

Ankét a matematikatanárok továbbképzéséről. Az anyagot előterjesztette: *Szalay István,* az ankétot vezette: *Kőváry Károly.* (A Középiskolai szekcióval közösen.)

A szekcióülések után számítástechnikai szemináriumokban személyi számítógépeken dolgozhattak a vándorgyűlés résztvevői.

Az előadások közötti szünetekben és a szabad időben termékeny eszmecserékre és beszélgetésekre is jutott idő. A résztvevők több írásos anyagot is kaptak. Így például a tanári továbbképzéssel kapcsolatos tájékoztatót, részletes tematikát és irodalmat, az 1985. évi matematikai versenyek, valamint az egyetemi felvételi vizsgák feladatait és azok megoldásait.

A szakmai rendezvényeken túl a vendéglátók és szervezők számos szórakoztató programról is gondoskodtak. A vándorgyűlés résztvevői megtekintették a Kisfaludy Színházban Verdi: A trubadur című operáját, részt vehettek egy városnéző sétán,

választhattak négyféle kirándulás közül (Mosonmagyaróvár, Abda-Lébénymiklós, Pannonhalma, Szigetköz) és végül kitűnően szórakozhattak (és táncolhattak) a közös vacsora alkalmából. A gördülékeny szervezés és jó ellátás ugyancsak kellemes emlékeket hagyott a résztvevőkben.

Az 1986. évi vándorgyűlést előreláthatólag Nyíregyházán rendezi meg a Bolyai János Matematikai Társulat.

FELADATOK

Rovatvezető: Pogáts Ferenc

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: Budapest, Petőfi Sándor u. 10. II. 10., 1052. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljük! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak különböző megoldásait is) külön lapra írjuk tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsuk össze, és külső felére írjuk rá a feladat számát és a megoldó nevét! Csatoljunk a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő negyedik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: A lap kézbesítésétől számított egy hónap.

1113. Bizonyítsuk be, hogy a természetes számok $\mathbf{N}$ halmaza felbontható két olyan osztályra, melyek egyikének tetszőleges n elemére n^2+1, míg a másik osztály tetszőleges m elemére m^2+2 nem köbszám!

Nagy Ferenc, Hajdúnánás

1114. Az ABC egyenlő szárú ($AB=AC$) háromszög B és C csúcsainál levő szöge 40°-os. Mérjük fel az AB félegyenesre B ponton túl az $AD=BC$ feltételnek eleget tevő D pontot. Mekkorák a BCD háromszög szögei?

1115. Az A, B, C kollineáris ponthármasra $AC:CB=3$. Az AC és a CB szakasz, mint átmérő fölé írjunk félköröket. Emeljünk az A, illetve a B pontban AB-re merőleges a, illetve b egyenest. Legyen k az a és b egyeneseket, továbbá a nagyobbik átmérőjű kört érintő kör. Bizonyítsuk be, hogy van a b egyenest, k kört és a két félkört érintő kör!

1116. Határozzuk meg a 302^{1000} (tízes számrendszerbeli) szám első két számjegyét!

Bíró Béla, Sepsiszentgyörgy

1117. Legyen $n=4k+1$ természetes szám, p pedig tetszőleges prímszám. Mutassuk meg, hogy az $M=\left\{\binom{p^n}{1}, \binom{p^n}{p}, \ldots, \binom{p^n}{p^{n-1}}\right\}$ halmaz elemei nem sorolhatók két, nem üres, diszjunkt részhalmazba (melyek egyesítése az M) úgy, hogy az egyik halmaz elemeinek a szorzata egyenlő legyen a másik halmaz elemeinek a szorzatával!

Cseh László, Kolozsvár

1118. Jelöljön E egy legalább két elemű véges halmazt, $f\colon E\to E$ pedig egy nem injektív függvényt. Legyen n az a legkisebb természetes szám, amelyre

$$\underbrace{(f\circ f\circ \ldots \circ f)}_{n\text{-szer}}(E) = \underbrace{(f\circ f\circ \ldots \circ f)}_{n+1\text{-szer}}(E).$$

Bizonyítsuk be, hogy bármely pozitív egész i-hez, amely nem nagyobb n-nél, létezik

$x_i \in E$ úgy, hogy $x_i, f(x_i), (f \circ f)(x_i), \ldots, (f \circ f \circ \ldots \circ f)_{i-1}(x_i)$ közül semelyik sem eleme $(f \circ f \circ \ldots \circ f)_i(E)$-nek!

Merényi Imre, Kolozsvár

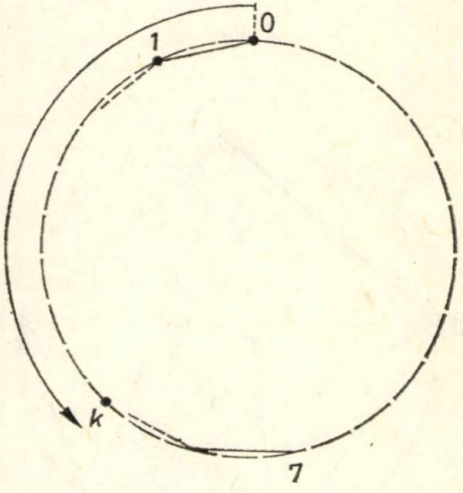
Feladatmegoldások (1089—1094.)

1089. Egy szabályos 13-szög csúcsait két színnel kiszíneztük. Mutassuk meg, hogy van három egyszínű csúcs, amelyek egy egyenlő szárú háromszöget alkotnak!

I. megoldás: A szabályos 13-szög csúcsai között van két szomszédos egyforma színű, mondjuk kék, hiszen a csúcsok száma páratlan. Legyen ez a két csúcs *0* és *1 (2. ábra)*. Ha a velük szomszédos *2* és *12* csúcsok valamelyike kék, úgy máris van három egyszínű csúcs, melyek egyenlő szárú háromszöget alkotnak. Ha a *01* oldal felező merőlegesén fekvő *7* csúcs színe kék, akkor a *017* háromszög, míg ha a *7* színe piros, akkor a *2 7 12* háromszög csúcsai lesznek egyező színűek.

Csete Lajos, Markotabödöge
Mészáros József, Galánta

II. megoldás: A 13 csúcs között van 7 egyező színű. A szabályos 13-szög csúcsait 6 különböző hosszúságú szakasz köti össze, következésképpen a $\binom{7}{2}=21$ darab (egyszínű csúcsot összekötő) szakasz között van négy egyenlő hosszúságú. Ezek végpontjai között legfeljebb 7 különböző van, így létezik olyan csúcs, amelyre két egyenlő hosszúságú szakasz illeszkedik. Egyenlő hosszú szakaszok csatlakozása esetén viszont egyenlő szárú háromszög keletkezik, melynek csúcsai az előzőek értelmében egyező színűek.



1. ábra

III. megoldás: Ha találomra kiválasztunk három csúcsot, ezek között legalább kettőnek azonos színe lesz. Ezt a két egyszínű csúcsot számozzuk meg a következő módon: az *egyiket jelöljük 0-val*, majd haladjunk a rövidebb körív mentén a másik csúcspont felé. A másik pont így egy 7-nél kisebb sorszámot kap.

Ezt *jelöljük k-val! (1. ábra.)*

A szabályos háromszög csúcsaiból alkotott bármelyik szakaszhoz pontosan három különböző egyenlő szárú háromszög tartozik. A *0; k* szakaszhoz is három egyenlő szárú háromszöget szerkeszthetünk. Ezeknek a háromszögeknek a csúcsai a következő sorszámokat viselik:

a) $0;\ k;\ 13-k$,

b) $0;\ k;\ 2 \cdot k$ (feltételeztük, hogy $k < 7$),

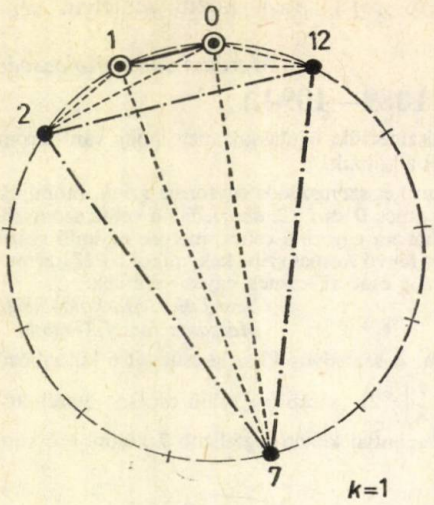
c) $0;\ k;\ \dfrac{k+0}{2} = \dfrac{k}{2}$ vagy $0;\ k;\ \dfrac{k+13}{2}$

(attól függően, hogy k páros-e vagy páratlan). Ez a három csúcs (ti.: a $13-k$, $2 \cdot k$ és a $\dfrac{k}{2}$ vagy $\dfrac{k+13}{2}$) semmiképpen sem eshet egybe, sőt minden esetben egy-egy egyenlő szárú háromszöget alkot (amelynek mellesleg mindig a $\dfrac{k}{2}$, illetve a $\dfrac{k+13}{2}$ sorszámú csúcs a főcsúcsa).

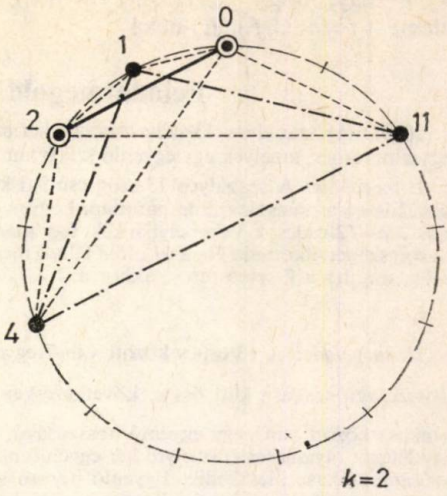
Ebből adódik a bizonyítás lényege: Ha a *0* és a *k* sorszámú, egyszínű csúcsokhoz megkeressük a szabályos tizenháromszögnek azokat a csúcsait, amelyek a *0*-val és a *k*-val egyenlő szárú háromszöget alkotnak, és *ezek egyike sem lesz olyan színű, mint 0 és k, akkor is van legalább egy egyszínű egyenlő szárú háromszög*, hiszen ezek a csúcsok egy egyenlő szárú háromszöget alkotnak. Konkrétan: A *0; k* ($k<7$) szakaszhoz tartozó csúcspontok a következő háromszögeket hozzák létre:

ha $k = 1$, akkor *12; 2; 7*, ha $k = 4$, akkor *9; 8; 2*,
ha $k = 2$, akkor *11; 4; 1*, ha $k = 5$, akkor *8; 10; 9*,
ha $k = 3$, akkor *10; 6; 8*, ha $k = 6$, akkor *7; 12; 3*. *(2—7. ábrák).*

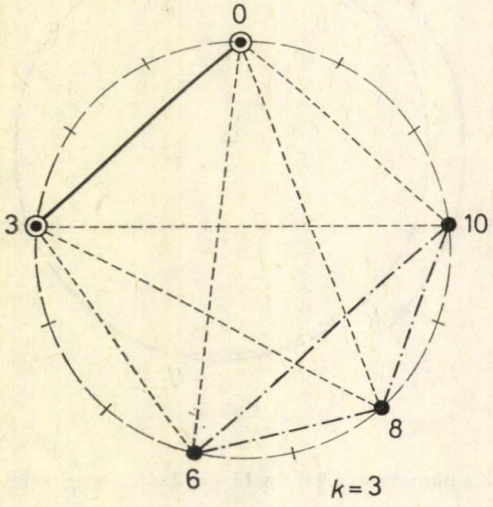
Horváth Géza, Zseliz



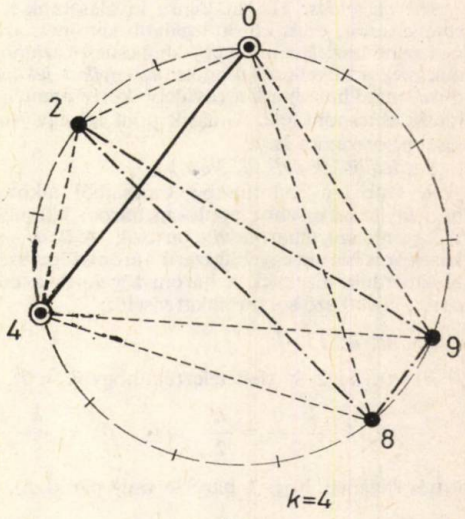
2. ábra



3. ábra



4. ábra



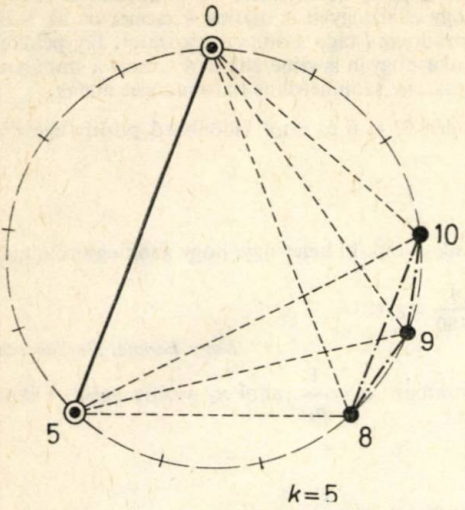
5. ábra

Megjegyzések

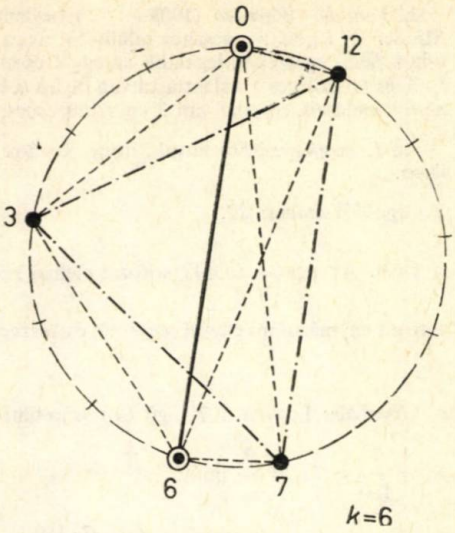
1. A feladat állítása igaz marad, ha 13 helyett 5-öt, 7-et, vagy tetszőleges 8-nál nagyobb egész számot mondunk. A 3-, 4-, 6- és 8-szögek csúcsait lehet úgy pirosra és kékre színezni, hogy ne legyenek közöttük egyszínű egyenlő szárú háromszögek *(8. ábra* a boríton*)*.

A feladat előbbi megoldásaiból kitűnik, hogy az állítás igaz, minden n ($\geqq 5$) páratlan oldalszámú szabályos sokszögre, így az $n=2^r \cdot p$ (p páratlan és $r \geqq 1$) egész eseteket kell megvizsgálnunk.

Ha p háromnál nagyobb páratlan szám, akkor az n csúcs közül kiválasztható p számú úgy, hogy ezek egy p oldalú szabályos sokszög csúcsai legyenek $\left(\text{minden } \frac{n}{p}\text{-ediket választjuk ki}\right)$, ezekre pedig mint láttuk, igaz az állítás.



6. ábra



7. ábra

Maradt a $p=1$ és a $p=3$ esetekhez tartozó

$$n = 2^r \quad (r \geqq 4) \quad \text{és} \quad n = 2^r \cdot 3 \quad (r \geqq 2)$$

oldalú szabályos sokszögek vizsgálata.

A továbbiakban kimutatjuk, hogy az állítás $n=12$-re és $n=16$-ra igaz. Az $n=2^r$ ($r\geqq 5$) esetek az utóbbira, az $n=2^r \cdot 3$ ($r\geqq 3$) esetek pedig az előbbire vezethetők vissza. A bizonyítás úgy történik, hogy konstruálni akarunk olyan esetet, amelyre az állítás hamis. Kiderül, hogy ez nem sikerülhet.

A szabályos n-szög csúcsait — valamely körüljárás szerint — számozzuk meg 1-től n-ig.

Feltehető, hogy van két azonos színű szomszédos csúcs. (Ellenkező esetben a szomszédos csúcsok váltakozó színűek lennének; elhagyva az egyik színű csúcsokat, azonos színezésű $n/2$-szöghöz jutnánk, ahonnan könnyen kiválasztható az egyenlő szárú háromszöget alkotó 3 csúcs). Jelölje ezeket A_2 és A_3, színük legyen kék. Az ezek melletti A_1 és A_4 csúcsok pirosak (ha valamelyik kék volna, akkor három azonos színű szomszédos csúcs lenne).

A továbbiakban az $n=16$ esetet vizsgálva, látható, hogy A_{14} kék (ha ugyanis piros volna, akkor $A_1A_4A_{14}$ piros csúcsú egyenlő szárú háromszög lenne). Ilyen indoklást a továbbiakban röviden így jelölünk:

A_{14} kék $(A_1A_4\ A_{14})$.

Folytatva:

A_7 kék $(A_1A_4\ A_7)$,

A_{16} piros $(A_2A_{14}A_{16})$,

A_{15} kék $(A_1A_{15}A_{16})$.

Már kaptunk is azonos színű csúccsal rendelkező egyenlő szárú háromszöget: $A_3A_7A_{15}$.

Nézzük ezután az $n=12$ esetet:

A_{10} kék $(A_1A_4\ A_{10})$,

A_7 kék $(A_1A_4\ A_7)$,

A_{12} piros $(A_2A_{10}A_{12})$,

A_{11} kék $(A_1A_{11}A_{12})$,

viszont $A_3A_7A_{11}$ egyenlő szárú, és mindhárom csúcsa kék. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Kamarás Lajos, Pécs

2. *Van der Waerden* (1903—) holland matematikus bizonyította be a következő tételt: Minden k, l pozitív egészhez található olyan n, hogy akárhogyan is osztjuk k csoportba az 1-től n-ig terjedő egészeket, legalább az egyik csoport tartalmaz l tagú számtani sorozatot. Így például $l=3$ és tetszőleges k választásra van olyan n, hogy akárhogyan is színezzük ki k színnel a szabályos n-szög csúcsait, mindig van 3 egyszínű csúcs, melyek egy szimmetrikus háromszöget adnak.

Az *1. megjegyzésben* láttuk, hogy $k=2$-re minden 3, 4, 6 és 8-tól különböző pozitív egész n ilyen.

A megoldók száma: 22.

1090. Az $a_n=\frac{1}{n}$ $(n\geqq 1)$ sorozat elemei közül válasszunk ki hetet úgy, hogy azok egy számtani sorozat egymásutáni elemei legyenek és összegük $\frac{1}{180}$ legyen!

Nagy Ferenc, Hajdúnánás

Megoldás: Legyen a 7 tagú (a_i) számtani sorozatban $a_4=\frac{1}{n_4}$, ahol n_4 pozitív egész. Ekkor $S_7=\frac{1}{180}=7a_4=\frac{7}{n_4}$ miatt

$$n_4=7\cdot 180=1260 \quad \text{és} \quad a_4=\frac{1}{1260}.$$

Ezek szerint, a számtani sorozat tulajdonságaiból

$$a_1+a_7=a_2+a_6=a_3+a_5=2a_4=\frac{1}{630}. \tag{1}$$

A feladat feltételeinek megfelelően, mivel $a_i=\frac{1}{n_i}$ $(1\leqq i\leqq 7)$, ha $a_i\leqq a_{i+1}$, úgy $n_i\geqq n_{i+1}$, tehát $a_1\leqq a_7$ és $n_1\geqq n_7$. Ebből és (1)-ből következően

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_7}=\frac{1}{630},$$

továbbá a számtani sorozat d $(\geqq 0)$ különbségével

$$\frac{1}{n_7}=\frac{1}{n_1}+6d.$$

Ezek szerint

$$d=\frac{1260-n_7}{6\cdot 630n_7}.$$

Fejezzük ki n_7 segítségével a többi n_i-t!

$$n_1=\frac{630n_7}{n_7-630}, \quad n_2=\frac{6\cdot 630n_7}{5n_7-4\cdot 630}, \quad n_3=\frac{6\cdot 630n_7}{4n_7-2\cdot 630}, \quad n_4=1260,$$

$$n_5=\frac{6\cdot 630n_7}{2n_7-2\cdot 630}, \quad n_6=\frac{6\cdot 630n_7}{n_7+630}.$$

Mivel az n_i mindegyike pozitív egész, ezért arra a kérdésre kell választ adnunk, hogy melyek azok a $630<n_7\leqq 1260$ természetes egészek, amelyekre az n_i kifejezések mindegyike pozitív egész szám. A következő — SPECTRUM számítógépre írt — program választ ad a kérdésre:

```
10 PRINT AT 21, 0;
20 PRINT "n7: n1: n2: n3: n5: n6:"
25 LET A=630
30 FOR n7=631 TO 1260
50 LET n1=A*n7/(n7-A)
60 LET n2=6*A*n7/(5*n7-4*A)
70 LET n3=6*A*n7/(4*n7-2*A)
80 LET n5=6*A*n7/(2*n7-2*A)
```

```
90 LET n6=6*A*n7/(n7+4*A)
100 IF n1=INT n1 AND n2=INT n2 AND n3=INT n3 AND n5=INT n5
    AND n6=INT n6 THEN GOSUB 200
110 NEXT n7
120 RANDOMIZE USR 3190: RANDOMIZE USR 3190: PRINT AT 21,0;
130 PRINT TAB 15; "Vége van!"
140 STOP
200 PRINT TAB 0; n7; TAB 5; n1; TAB 10; n2; TAB 15; n3; TAB 20; n5; TAB 25; n6
210 RETURN
```

A program a következő eredményeket adja:

n7	n1	n2	n3	n5	n6
720	5040	2520	1680	1008	840
840	2520	1890	1512	1080	945
1260	1260	1260	1260	1260	1260

Varga István, Nagyszalonta

Megjegyzés

A feladatnak egyszerű általánosítására is mód van: Az $a_n=\frac{1}{n}$ $(n\geqq 1)$ sorozat elemei közül mindig kiválasztható k darab úgy, hogy ezek egy számtani sorozat egymást követő elemei legyenek és összegük $\frac{k+1}{2(k-1)!}$.

A számtani sorozat első eleme és különbsége legyen például $\frac{1}{k!}$, ekkor $S_k=$

$$=\frac{1}{2}\left(2\cdot\frac{1}{k!}+(k-1)\frac{1}{k!}\right)k=\frac{k+1}{2(k-1)!}.$$

Bencze Mihály, Brassó

A megoldók száma: 20.

1091. Vannak-e olyan, a nullától különböző x és y egészek, amelyekre az alábbi kifejezések

$$(x+3y)x^2 \quad \text{és} \quad (y+3x)y^2$$

egyidőben köbszámok?

Tuzson Zoltán, Marosvásárhely

Megoldás: Legyen $(x+3y)x^2=a^3$ és $(y+3x)y^2=b^3$, ekkor

$$a^3+b^3=x^3+3yx^2+3xy^2+y^3=(x+y)^3=c^3, \tag{1}$$

az $x+y=c$ jelölés bevezetésével.

Az $a^n+b^n=c^n$ *Fermat*-féle egyenletnek $n=3$ esetén nincs megoldása a pozitív egészek körében (lásd: *Dr. Sárközy András:* Számelmélet és alkalmazásai, Műszaki Könyvkiadó 1978., 184. oldal), ennélfogva (1)-nek csak akkor lehet a nullától különböző x és y egészek között megoldása, ha $abc=0$.

1. Ha $a=0$, de $x\neq 0$, úgy $x+3y=0$ és $(y+3x)y^2=-8y^3=(-2y)^3$.

2. Ha $b=0$, de $y\neq 0$, akkor $y+3x=0$ és $(x+3y)x^2=(-2x)^3$.

3. Ha $c=0$, úgy $x+y=0$ és $(x+3y)x^2=-2x^3$ csak $x=0$-ra köbszám.

A feladat megoldása tehát:

$$x\in\mathbf{Z}\setminus\{0\},\quad y=-3x,\quad \text{és ekkor}\quad (x+3y)x^2=(-2x)^3,\quad (y+3x)y^2=0$$

vagy

$$y\in\mathbf{Z}\setminus\{0\},\quad x=-3y,\quad \text{és ekkor}\quad (x+3y)x^2=0,\quad (y+3x)y^2=(-2y)^3.$$

A feladatbeli kifejezések egyike tehát mindig a 0.

A megoldók száma: 17.

Hajna János, Pécs
Dr. Major Pál, Budapest
Spissich László, Pápa

1092. Oldjuk meg a valós számok halmazán a

$$\sum_{k=0}^{n}\left[2^k\cdot x+\frac{1}{2}\right]=2^n$$

egyenletet, $[a]$ az a szám egész részét jelöli, n pedig természetes egész!

Varga István, Nagyszalonta

Megoldás: $x>0$ kell legyen, ellenkező esetben ugyanis egyenletünk bal oldala negatív, vagy 0 lenne.

Alkalmazzuk $a=2^k x$-re a $[2a]=[a]+\left[a+\frac{1}{2}\right]$ azonosságot. (Érdekes matematikai gyakorló feladatok VI., Tankönyvkiadó, Bp. 164. feladata). Ekkor

$$[2^{k+1}\cdot x]=[2^k\cdot x]+\left[2^k x+\frac{1}{2}\right],$$

amiből

$$\left[2^k x+\frac{1}{2}\right]=[2^{k+1}\cdot x]-[2^k\cdot x].$$

Ezért

$$\sum_{k=0}^{n}\left[2^k x+\frac{1}{2}\right]=\sum_{k=0}^{n}([2^{k+1}\cdot x]-[2^k x])=[2^{n+1}x]-[x],$$

egyenletünk pedig:

$$[2^{n+1}\cdot x]-[x]=2^n.$$

Legyen $x=u+v$, ahol $u\geqq 0$ egész és $0\leqq v<1$ valós. Ekkor

$$[2^{n+1}(u+v)]-u=2^n, \tag{1}$$

és felhasználva, hogy $A+[B]=[A+B]$ teljesül minden nemnegatív A, B-re, ahol A egész, B valós:

$$[2^{n+1}\cdot v]=2^n(1-2u)+u \tag{2}$$

adódik. $0\leqq v<1$ miatt $2^n(1-2u)+u\geqq 0$ kell legyen. Ezért

$$u\leqq\frac{2^n}{2^{n+1}-1},$$

amelyből $n=0$ esetén $u=0$ vagy $u=1$, $n>0$ esetén pedig $u=0$. Ha $n=u=0$, akkor (2) miatt $[2v]=1$, tehát

$$\frac{1}{2}\leqq v<1, \tag{3}$$

míg $n=0$, $u=1$-re, $[2v]=0$, azaz

$$0\leqq v<\frac{1}{2}. \tag{4}$$

Ezek szerint $n=0$ esetén egyenletünk megoldásait a (3) és (4) alapján

$$\frac{1}{2}\leqq x<\frac{3}{2} \tag{5}$$

adja.

Ha $n>0$, akkor — mint láttuk — $u=0$, tehát $x=v$, és így a (2)-ből

$$[2^{n+1}\cdot x]=2^n,$$

vagyis

$$2^n\leqq 2^{n+1}\cdot x<2^n+1,$$

azaz

(6) $$\frac{1}{2} \leqq x < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Eredeti egyenletünk megoldását tehát $n=0$ esetén (5), $n>0$ esetén pedig (6) adja.

Csorba Ferenc, Győr

A megoldók száma: 16.

1093. Mutassuk meg, hogy a

$$\operatorname{tg}\frac{1}{x} = \frac{x}{\ln x}$$

egyenletnek bármely $\left(\frac{2}{(2k+1)\pi}, \frac{2}{(2k-1)\pi}\right)$ (k pozitív egész) intervallumon van megoldása!

Biró Béla, Barót

Megoldás: Mivel $x>0$ és $x \neq 1$ kell legyen az $\frac{1}{\ln x}$ értelmezési tartománya, továbbá $-\frac{\pi}{2}+\pi k < \frac{1}{x} < \frac{\pi}{2}+\pi k$ (k egész), ezért k csak pozitív egész lehet, így minden szóba jövő x-re $0 < x < \frac{2}{\pi}$ és $x \neq \frac{2}{(2k-1)\pi}$.

A $\operatorname{tg}\frac{1}{x}$ folytonos, szigorúan csökkenő és minden valós értéket (valamennyi jelzett intervallumon) felvesz. Az $\frac{x}{\ln x}$ függvény a $\left(0; \frac{2}{\pi}\right)$ intervallumban mindenütt negatív, hiszen $x>0$ és $\ln x < 0$; folytonos is, mert ilyenek hányadosa; szigorúan csökkenő, mivel első deriváltja: $\frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} < 0$; alulról korlátos, hiszen értékkészlete $\left(\frac{2}{\pi \ln \frac{2}{\pi}} \approx -1{,}41;\ 0\right)$.

Ezek alapján az egyenlet két oldalán álló függvények görbéinek minden $\left(\frac{2}{(2k+1)\pi}; \frac{2}{(2k-1)\pi}\right)$ intervallumban van pontosan egy metszéspontja, tehát az egyenletnek minden ilyen intervallumban van, mégpedig egy gyöke.

Illésy Istvánné, Kiskunfélegyháza

A megoldók száma: 16.

1094. Legyenek $m \leqq n$ pozitív egészek, $x>0$ valós szám. Bizonyítsuk be, hogy

$$2mn(n^x - m^x) \leqq (n-m)(m^{x+1} + n^{x+1})x.$$

Louis Funar Lucian, Cralova

Megoldás: A szorzás elvégzése után rendezve egyenlőtlenségünket az

$$n^{x+2} \cdot x + n \cdot m^{x+1} \cdot x - n^{x+1} \cdot x \cdot m - m^{x+2} \cdot x - 2mn^{x+1} + 2m^{x+1} \cdot n \geqq 0$$

helyességét kell igazolni. Évégből tekintsük azt az

$$f(y) := y^{x+2} \cdot x - y^{x+1}(mx+2m) + y(m^{x+1}x + 2m^{x+1}) - m^{x+2} \cdot x$$

polinomfüggvényt, amelyben $y \geqq m$!

Mivel $f(m)=0$ és $f'(y) = (x+2)\left(y^{x+1} \cdot x - (x+1)my^x + m^{x+1}\right)$, elég azt megmutatnunk, hogy ha $y>m$, akkor $f'(y)>0$, hogy tehát az $f(y)$ szigorúan növekedő.

Legyen

$$g(y) := x \cdot y^{x+1} - (x+1)my^x + m^{x+1}.$$

Erre $g(m)=0$ és $g'(y) = x(x+1)(y-m)y^{x-1}$, tehát minden $x>0$ és $y>m$-re $g'(y)>0$, így a $g(y)$ szigorúan növekvő és $g(y)>g(m)=0$, ennélfogva $f'(y)>0$, vagyis $f(y)>0$ és ezt akartuk megmutatni.

Bizonyításunkból az is következik, hogy az egyenlőtlenség tetszőleges $m \leqq n$ pozitív számokra is igaz és az egyenlőség csak $m=n$ esetén áll fenn.

Sándor József, Székelyudvarhely

A megoldók száma: 8.

A megoldók névsora (1089—1094.)

Ambrus Gabriella, Budapest (1089., 1092); Barta Miklós, Marosújvár (1090—1092.); Bencze Mihály, Brassó (1090., 1092—1094.); Boda Miklós, Pécs (1090., 1093.); Burus Árpád Csaba, Székelyudvarhely (1089—1094.); Cseh László, Kolozsvár (1089—1094.); Csete Lajos, Markotabödöge (1089, 1091.); Csorba Ferenc, Győr (1089., 1091—1093.); Fazekas Jánosné Szeghalom (1089—1091.); Földeák Árpád, Budapest (1089.); Hajna János, Pécs (1089., 1091—1093.); Horváth Géza, Zselíz (1089., 1090.); Illésy Istvánné, Kiskunfélegyháza (1089—1093.); Kamarás Lajos, Pécs (1089—1093.); Kondor László, Dunaújváros (1089., 1091.); ifj. Kováts Péter, Kaposvár (1089.); Dr. Major Pál, Budapest (1090., 1091.); Merényi Imre, Kolozsvár (1089—1094.); Mészáros József, Galánta (1089—1093.); Mészáros Mihály, Hejőkeresztúr (1089., 1092.); Nagy Ferenc, Hajdúnánás (1090.); Róka Sándor, Tiszavasvári (1089. 2 mód, 1093.); Sándor József, Székelyudvarhely (1089., 1090., 1092—1094.); Schutzbach Mártonné, Siófok (1089., 1090.); Spissich László, Pápa (1089—1093.); Tuzson Zoltán, Marosvásárhely (1089—1094.); Varga István, Nagyszalonta (1089—1092., 1093. 2 mód, 1094.); Zalán Péterné, Budapest (1090.); Zábrádiné Schmierer Emilia, Győr (1090.).

Új könyvek

BAZILJEV, V. T.—DUNYICSEV, K. I.—IVANYICKAJA, V. D.: *Geometria I., II.* (Egyetemi segédkönyv) Budapest, 1985, Tankönyvkiadó, 354, 379 oldal, 49,—, 50,— Ft.

FILEP LÁSZLÓ: *Játékelmélet.* (Középiskolai szakköri füzet) Budapest, 1985, Tankönyvkiadó, 243 oldal, ár nélkül.

HALMAI ERZSÉBET: *Lineáris algebra.* (Egyetemi tankönyv, 2. kiadás) Budapest, 1985, Tankönyvkiadó, 339 oldal, 39,— Ft.

HALMOS, PAUL R.: *Mértékelmélet.* Budapest, 1984, Gondolat Könyvkiadó, 261 oldal, 47,— Ft.

KOVÁCS CSONGORNÉ (szerk.): *Kézikönyv a matematika 5. osztályos anyagának tanításához.* (3. kiadás) Budapest, 1985, Tankönyvkiadó, 366 oldal, 43,— Ft.

KOVÁCS CSONGORNÉ (szerk.): *Kézikönyv a matematika 6. osztályos anyagának tanításához.* (3. kiadás) Budapest, 1985, Tankönyvkiadó, 397 oldal, 47,— Ft.

LEINDLER LÁSZLÓ: *Ortogonális sorok szummálhatósága.* Akadémiai székfoglaló, Budapest, 1985, Akadémiai Kiadó, 44 oldal, 17,— Ft.

MARX GYÖRGY: *A természet játékai, 30 játék és modell a természettudományok tanításához.* Budapest, 1985, Ifjúsági Lapkiadó, 316 oldal, 86,— Ft.

NEUGEBAUER, OTTÓ: *Egzakt tudományok az ókorban.* Budapest, 1985, Gondolat Könyvkiadó, 260 oldal, 55,— Ft.

OBÁDOVICS JÓZSEF GYULA: *Matematika.* Középiskolai, technikumi tanulók, egyetemi hallgatók és technikusok számára, gyakorlati alkalmazásokkal (12. kiadás), Budapest, 1985, Műszaki Könyvkiadó, 807 oldal, 80,— Ft.

POSTON, TIM—STEWART, IAN: *Katasztrófaelmélet és alkalmazásai.* Budapest, 1985, Műszaki Könyvkiadó, 359 oldal, 106, — Ft.

RÉTHÁTI LÁSZLÓ: *Valószínűségelméleti megoldások a geotechnikában.* Budapest, 1985, Akadémiai Kiadó, 393 oldal, 115,— Ft.

SACHS, LOTHAR: *Statisztikai módszerek.* Budapest, 1985, Mezőgazdasági Kiadó, 138 oldal, 47,— Ft.

SCHARNITZKY VIKTOR: *Egyetemi felvételi feladatok matematikából VI. kötet, 1980—1982.* Budapest, 1985, Tankönyvkiadó, 406 oldal, 28,— Ft.

SCHARNITZKY VIKTOR: *Vektorgeometria és lineáris algebra.* Matematika a műszaki főiskolák hallgatói számára, Budapest, 1985, Tankönyvkiadó, 185 oldal, 19,— Ft.

SIMMONDS, JAMES G.: *Tenzoranalizis dióhéjban.* Budapest, 1985, Műszaki Könyvkiadó, 118 oldal, 62,— Ft.

SOLT GYÖRGY: *Valószínűségszámítás, példatár.* (5. kiadás) Budapest, 1985, Műszaki Könyvkiadó, 265 oldal, 35,— Ft.

STEINHAUS, HUGO: *Matematikai kaleidoszkóp.* Budapest, 1984, Gondolat Könyvkiadó, 357 oldal, 46,— Ft.

ZASLAVSKI, CLAUDIA: *Afrika számol.* Budapest, 1984, Gondolat Könyvkiadó, 350 oldal, 70,— Ft.

Dr. Scharnitzky Viktor

Ára: 5,50 Ft

INDEX: 25 565